

Miskolczi Panna

A történeti és a kopulafüggvényen alapuló kockázatszámítás összehasonlítása

ÖSSZEFOGLALÓ: Jelen tanulmány alapvető célja a történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás összehasonlítása a kopulafüggvényen alapuló kockázatszámítással. A történeti szimuláció azzal a feltételezéssel él, hogy a múltbeli adatokkal megbecsülhetjük a jövőbelieket. A kopulafüggvény egy többdimenziós eloszlásfüggvény, melynek segítségével feltárhatjuk a valószínűségi változók (jelen esetben a portfólióban lévő részvények) közötti összefüggéseket és így szimulálhatjuk, előre jelezhetjük a jövőbeli alakulásukat. Egy módszert akkor nevezek jobbnak, ha azzal pontosabban becsülhető meg a kockázat, azaz, ha a tényleges és a becsült értékek közelebb vannak egymáshoz. A kockázat meghatározásához a Value at Risk, illetve az Expected Shortfall kockázati mértékeket használok, míg a két szimuláció pontosságát az úgynevezett utótesztelés módszerével tesztelem. A hét részvény napi árfolyamadatain végzett empirikus tanulmány eredményei alapján elmondható, hogy a kopulafüggvényen alapuló kockázatszámítás segíthet a kockázat pontosabb modellezésében.

KULCSSZAVAK: kopula, történeti szimuláció, utótesztelés, Value at Risk, Expected Shortfall

JEL-KÓDOK: C51, C53, G17

A kockázat mindenhol jelen van, közvetve vagy közvetlenül befolyásolva döntéseinket és ezáltal életünket. A mai modern, globalizált világunkban pedig kiemelkedő jelentőséggel bír a kockázat megismerése, mérése és előrejelezhetősége többek között pénzügyi területen is. Annak ellenére, hogy a pénzügyi kockázat menedzselése egyre inkább előtérbe kerül, a mai napig sem teljesen egyértelmű, hogy mi lehet az a matematikai fogalom, mérték, amellyel a kockázatot pontosan le lehet írni, ki lehet számolni. Az első fejezetben bemutatom a kockázati mértékekkel szemben támasztott legfontosabb „követelményeket”, a kockázati mérték definícióját és a napjainkban legtöbbet használt két kockázati mérté-

ket, a kockázatotott értéket (*Value at Risk*) és az *Expected Shortfall*-t.

Az egyik fontos tulajdonság, amit a kockázati mértékekkel szemben támasztunk, hogy a diverzifikáció ne növelje egy portfólió kockázatát. Ennek ellenére például, ha az adott portfólióban szereplő részvények egy bizonyos esemény hatására ugyanúgy mutatnak extrém viselkedést, ez kiolthatja a diverzifikáció védelmező hatását. Ezért van szükség a portfólióban szereplő részvények közötti kapcsolatok minél pontosabb feltérképezésére. A legismertebb, sokat használt mérőszámok – mint például a Pearson-, Kendall-, vagy Spearmanféle korreláció – „csak” páronkénti korrelációt mérnek. Magasabb dimenziójú összefüggések mérésére szolgálnak az úgynevezett kopulafüggvények, amelyek definíciója, a témakör

Levelezési e-cím: miskolczipanna@gmail.com

legfontosabb tétele és példák megtalálhatók a Kopula függvények című fejezetben.

Dolgozatom célja a két módszer – a történeti és a kopulafüggvényen alapuló kockázatszámítás – összehasonlítása. Az összehasonlításhoz az úgynevezett utótesztelés módszerét használom. Mindkét módszer, illetve az utótesztelés bemutatására az Utótesztelés című fejezetben kerül sor.

Az ezt következő fejezet tartalmazza az empirikus tanulmányt, illetve az eredményeket és az azokból levonható következtetéseket. A számításokhoz hét részvény napi logaritmikus hozamait használom, melyekhez az árfolyam adatokat a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról töltöttem le, tíz évre vonatkozóan. Ezek segítségével vizsgálom meg, hogy a történeti vagy pedig a kopulafüggvényen alapuló szimulációval végzett kockázatszámítás ad pontosabb képet a kockázatról.

KOCKÁZATI MÉRTÉKEK

Egy lehetséges megfogalmazás szerint a kockázat annak a lehetőségnek a mérlegelése, hogy valami értékkel bírót elveszítünk vagy megnyerünk („*Risk is the potential of losing something of value, weighed against the potential to gain something of value.*” Kungwani, 2014)). Ezt, a kockázatnak egy nagyon általános megfogalmazását természetesen sokféleképpen értelmezhetjük. Az is egyértelmű továbbá, hogy a kockázat jelentése és megfogalmazása tudományterületenként változhat.

A közgazdaságtan szempontjából úttörőnek számít Knight 1921-es Risk, Uncertainty, and Profit című műve, amelyben részletesen tárgyalja a különbséget a kockázat és a bizonytalanság között, és amellyel megalapozta a valószínűségeen alapuló közgazdaságtant (Bélyácz, 2010). A pénzügyi kockázat és egyben a modern portfólió elmélet alapjainak letétele Harry Markowitz nevéhez fűződik, aki 1952-ben

a Portfolio Selection (Markowitz, 1952) című cikkében a kockázatot a portfólió szórásának segítségével definiálta.

A pénzügyi kockázat kezelése, azaz a kockázati tényezők azonosítása, mérése és ellenőrzése ma is elengedhetetlen eszköz bármely üzleti tevékenység fenntartásához (Jorion, 1999). A mérés azonban önmagában még nem elég, a döntés meghozatala szempontjából az összehasonlíthatóság is nélkülözhetetlen szerepet játszik.

Matematikai szempontból tehát az a cél, hogy minél egyszerűbb mutatókkal, egyetlen mérőszámmal fejezhessük ki a kockázatot. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat kockázati mértékeknek nevezzük (Gáll-Pap, 2010). Pontosabban, kockázati mértéknek nevezünk minden χ halmazon értelmezett valós értékeket felvevő funkcionált: $\rho: \chi \rightarrow \mathbb{R}$, ahol χ valószínűségi változóknak (portfóliók, pénzügyi eszközök profitjának) egy halmaza (Gáll-Pap, 2010). Ez azt jelenti, hogy a kockázat mérése tulajdonképpen megfelel egy kapcsolat létesítésével a véletlen változók és a valós számok között (Szegő, 2002). Ez egy nagyon tág fogalom, ezért ahhoz, hogy a kockázat értelmes definíciójához jussunk, bizonyos korlátozásokat, tulajdonságokat meg kell fogalmazni a kockázati mértékekkel kapcsolatban.

Természetes módon több ilyen elvárás is adódik. Az irodalomban, lásd például Artzner *et al.*, (1999) leggyakrabban előforduló, legtöbbet használt tulajdonságok a következők:

① **Monotonitás:** ha egy befektetés hozama sosem kisebb, mint egy másiké, akkor elvárjuk, hogy ez a befektetés ne legyen kockázatosabb, mint a másik, azaz, ha $X \leq Y$ akkor $\rho(X) \geq \rho(Y)$, $\forall X, Y \in \chi$.

② **Szubadditivitás:** a szubadditivitást más néven diverzifikációs hatásnak is nevezik. Ez azt jelenti, hogy két befektetés eredő kockázata nem lehet nagyobb, mint az egyedi kockázataik összege, azaz $\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$,

$\forall X, Y, X + Y \in \mathcal{X}$. Természetesen több változó esetén is érvényes ez a tulajdonság.

③ *Pozitív homogenitás*: ha meg többszörözünk egy portfóliót, de megtartjuk annak összetételét, akkor elvárjuk, hogy a kockázat a nagyság-gal arányosan változzon, azaz $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$, $\forall X, \lambda X \in \mathcal{X}, \forall \lambda \geq 0$.

④ *Eltolás invariancia*: ha pozíciónkhoz adott hozamú kockázatmentes eszközt adunk, akkor elvárjuk, hogy a kockázat ennek a pénzáramnak a nagyságával csökkenjen, azaz $\rho(X+a) = \rho(X) - a$, $\forall X, X+a \in \mathcal{X}, \forall a \in \mathbb{R}$.

Ha egy kockázati mérték az itt említett mind a négy tulajdonságot teljesíti, akkor azt mondjuk, hogy a kockázati mérték koherens. Sokszor előfordul, hogy például egy adott hozam mellett a kockázat minimalizálása a cél. Az optimalizáció szempontjából tehát fontos a konvexitási tulajdonság megléte. Bizonyítható, hogy a pozitív homogenitásból és a szubadditivitásból következik a konvexitás is. Így a kockázat minél pontosabb mérése szempontjából egy olyan kockázati mértékre van szükség, amely kielégíti a monotonitási, szubadditivitási, pozitív homogenitási, valamint az eltolás invariáns tulajdonságokat és a gyakorlatban is viszonylag egyszerűen alkalmazható.

A Markowitz által bevezetett szórásról például belátható, hogy ugyan szubadditív és homogén, de nem monoton és nem eltolás invariáns. Ezeket túl nem tesz különbséget a nyereségek és a veszteségek között, így nem alkalmas a kockázat mérésére. Természetesen, több kockázati mérték létezik, de a gyakorlatban legtöbbször használt két kockázati mérték a kockázatotott érték (*Value at Risk*, *VaR*), és a várható veszteség *Expected Shortfall* (*ES*). A tanulmányban én is ezt a kettőt fogom használni, így a következőkben ezeket ismertetem részletesebben.

KOCKÁZATOTOTT ÉRTÉK (VaR)

A kockázatotott érték vagy más néven *VaR* (*Value at Risk*) az utóbbi évek leggyakrabban

használt mértéke a kockázat mérésére. Az 1987-es pénzügyi válságot követően emelkedett meg jelentős mértékben a *VaR* használata (Jorion, 1999).

A kockázatotott érték arra a természetesen felmerülő kérdésre hivatott választ adni, hogy egy adott időszak alatt, adott valószínűséggel minimálisan mennyit veszíthetünk (nyerhetünk). Másképpen megfogalmazva, a kockázatotott érték az a szám, amelynél nagyobb veszteség α -nál kisebb vagy egyenlő valószínűséggel fordul elő. Pontosabban, az X valószínűségi változó α -ad rendű kockázatotott értékét a következőképpen definiálhatjuk:

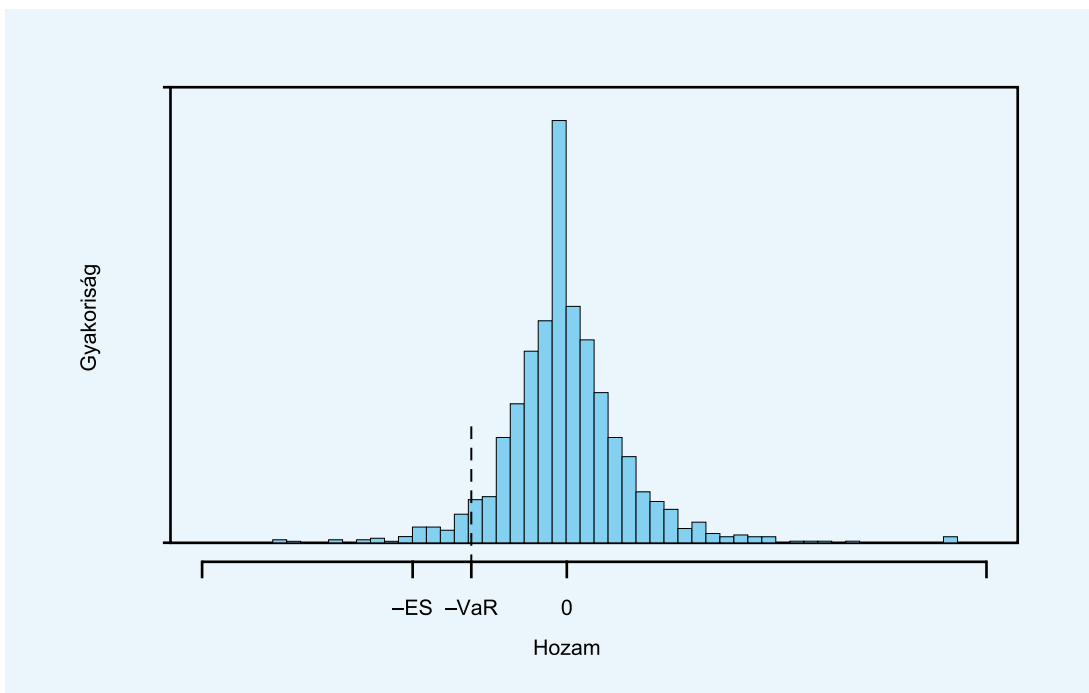
$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) \geq \alpha\},$$

ahol $F_X(x) := P(X \leq x)$ az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényét jelöli.

Az 1. ábrán látható – a későbbiekben részletesebben bemutatásra kerülő – FHB részvény hozamai alapján rajzolt hisztogram. Annak a valószínűsége, hogy egy érték a hisztogramra rajzolt piros vonaltól jobbra található, megegyezik a konfidenciaszinttel, azaz α -val, míg annak a valószínűsége, hogy egy érték ettől a vonaltól jobbra található megegyezik $1-\alpha$ -val. A konkrét példán – $VaR = -0,034$, $\alpha = 5\%$ -os szinten, azaz a kockázatotott érték $0,034$. Ez azt jelenti, hogy 5 százalék annak az esélye, hogy a veszteség nagyobb vagy egyenlő lesz $0,034$ -el, vagy másképpen fogalmazva 95 százalék ($1-\alpha$) annak az esélye, hogy nem veszítünk többet, mint $0,034$.

Belátható, hogy a *VaR* egy monoton, pozitív, homogén és eltolás invariáns kockázati mérték (Gáll – Pap, 2010). A *VaR* pozitív tulajdonsága, hogy a kockázatot egyetlen számban és pénznemben méri, így könnyen értelmezhető és a különböző értékek könnyen összehasonlíthatók (Acerbi et al., 2001). A *VaR* az úgynevezett downside kockázat mérésére szolgál, azaz csak a várható értéknél (várható hozamnál) kisebb értékeket veszi figyelem-

A VaR ÉS AZ ES BEMUTATÁSA HISZTOGRAM SEGÍTSÉGÉVEL



Forrás: saját szerkesztés

be. Viszont nagy probléma a *VaR*-ral, hogy nem támogatja a diverzifikációt, azaz nem szubadditív. Továbbá annak ellenére, hogy a *VaR* megmutatja, mely értéknél nem fogunk többet veszíteni és mekkora valószínűséggel, de az ezen az értéken túli veszteségekkel nem foglalkozik, pedig a súlyos, extrém események ismerete fontos lenne. Az 1. ábrán látható példánál ez azt jelenti: azt tudjuk ugyan, hogy 95 százalék annak az esélye, hogy nem veszítünk többet, mint 0,034, de arról semmilyen információt nem tudunk, hogy abban az 5 százalékban, amikor többet veszíthetünk, mekkora lehet ez a veszteség. Tehát a *VaR* csak elliptikus eloszlások esetén alkalmas a kockázat mérésére, nem elliptikus eloszlásoknál – ami a gyakorlatban nem ritka jelenség – a kockázat téves megítéléséhez vezethet (Embrechts et al., 2002). Mindezek mellett, mivel a *VaR* nem szubadditív, így nem is konvex, amely nehéz-

kessé vagy éppen lehetetlenné teszi a használatát optimalizációs problémák esetén (Szegő, 2002).

EXPECTED SHORTFALL (ES)

Látható tehát, hogy a *VaR* nem elégíti ki a koherens kockázati mértékek alapvető tulajdonságait. Felmerül tehát a kérdés, hogy létezik-e koherens kockázati mérték. A válasz igen, például az *Expected Shortfall (ES)*. Magyarul várható veszteséget jelent, de mivel a magyar irodalomban is angolul honosult meg a kifejezés, ezt fogom használni a továbbiakban.

A *VaR* esetében arra keressük a választ, hogy mi az a minimális veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha \times 100$ százalékában bekövetkezhet. Az *ES* esetén a kérdés következőképpen módosul: mi az a várható veszteség, ami az esetek legrosszabb $\alpha \times 100$ százalékában bekövetkez-

het (Acerbi, 2001). Matematikailag ezt a következőképpen fogalmazhatjuk meg: Legyen X egy valószínűségi változó, valamint $\alpha \in (0,1)$, és tegyük fel, hogy $E[(X)^-] < \infty$, ahol $(X)^-$ az X negatív része. Ekkor X *Expected Shortfall*-ja α szinten:

$$ES_{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} VaR_u(X) du.$$

Az 1. ábrán látható hozam-hisztogram esetén ez tulajdonképpen azt jelenti, hogy az ES a szaggatott piros vonaltól balra eső értékeknek adja meg a várható értékét. Ez a konkrét példa alapján: $-ES = 0,055$, $\alpha = 5\%$ -os szinten, azaz $ES = 0,055$. Ez azt jelenti, hogy 5 százalékos valószínűséggel a várható veszteség 0,055 lesz.

Elmondható, hogy az ES kielégíti a koherens kockázati mértékekre vonatkozó mind a négy tulajdonságot, azaz egy koherens kockázati mérték. Annak ellenére, hogy az ES rengeteg pozitív tulajdonsággal rendelkezik ez sem bizonyult tökéletesnek, hiszen például, míg a VaR mindig létezik, addig az ES létezéséhez az $E[(X)^-] < \infty$, feltételezéssel kell élni.

Később, az Empirikus tanulmány részben bemutatom a VaR és az ES kiszámításának módját konkrét részvényadatokat használva.

KOPULAFÜGGVÉNYEK

Mint ahogy azt már a kockázati mértékek tulajdonságainak tárgyalásakor említettem a diverzifikációnak nagy szerepe van a kockázat csökkentésében. Ennek ellenére a történelem során több pénzügyi válsággal is szembe kellett nézni. Ezeknek a válságoknak az egyik oka az lehetett, hogy egy esemény hatására a portfólióban nem csak egy faktor mutat extrém viselkedést, hanem együttesen több faktor is, kioltva ezzel a diverzifikáció „védelmező” hatását (Benedek et al., 2002, Aas, 2004).

Pénzügyi és gazdasági területen fontos probléma tehát a többdimenziós eloszlások becslése és modellezése. A matematikai elméletek és modellek legtöbb esetben normális, de legalábbis elliptikus eloszlást feltételeznek annak ellenére, hogy az empirikus adatokból látható, ez a feltétel sok esetben nem teljesül (Härdle et al., 2008). Ezen felül mutathatók olyan függőségi struktúrák is, ahol a korrelációs együtthatók megegyeznek, de maguk a struktúrák teljesen eltérőek. Továbbá a gyakran használt függőségi mérőszámok, mint a Kendall-féle tau, Spearman-féle rho, vagy a Pearson-féle együttható „csak” páronkénti függőséget mérnek. Ennél magasabb dimenziójú, általánosabb függőséget írhatunk le az úgynevezett kopulafüggvényekkel. A fejezet megírásában többek között *Durante-Sempi* (2010), *Embrechts et al.*, (2001 és 2002), *Nelsen* (2013), valamint *Cherubini et al.*, (2004) műveit használtam.

A kopulafüggvények segítségével modellezhetővé válik két vagy több valószínűségi változó között fennálló függőségi struktúra. Maga az elnevezés a latin *copulare* szóból származik, amely kötést, csatlakozást, köteléket, szalagot jelent és bevezetése *Abe Sklar* (Sklar, 1959) nevéhez fűződik. A kopulafüggvények használatának bevezetését a pénzügyi gyakorlatba pedig *Embrechts et al.* (1999) munkájának köszönhetjük, vagyis egy eléggé új és gyorsan fejlődő területről van szó.

Sklar tételében teremtette meg a kapcsolatot a kopulafüggvény, az együttes eloszlásfüggvény és a peremeloszlás-függvény között. Így lehetőség nyílik új együttes eloszlások, és ezáltal új függőségi mutatók meghatározására is.

A $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ többdimenziós kopulafüggvény tehát egy többdimenziós eloszlásfüggvény egyenletes eloszlású peremeloszlásokkal.

Ahogy már említettem, a kopulafüggvények témakörében az egyik legfontosabb tétel Sklar tétele, amely tulajdonképpen azt mond-

ja ki, hogy a közös eloszlásfüggvény „szétszedhető” a peremeloszlásokra és a köztük lévő függőségi struktúrára. Ez a függőségi struktúra a kopula:

Legyen F egy n -dimenziós eloszlásfüggvény, F_1, \dots, F_n peremeloszlásokkal. Ekkor létezik C kopula, melyre:

$$F(x_1, \dots, x_n) = C[F(x_1), \dots, F(x_n)], \\ \forall x_i \in \mathbb{R}.$$

A tétel megfordítása is igaz, azaz, ha C egy kopulafüggvény és F_1, \dots, F_n egyváltozós eloszlásfüggvények, akkor az $F(x_1, \dots, x_n) = C[F(x_1), \dots, F(x_n)]$ képlettel megadott F függvény egy n -változós eloszlásfüggvény az F_1, \dots, F_n peremeloszlásokkal.

A tételbeli összefüggés általában adott kopula- és peremeloszlás függvényeken alapuló szimulációk kiindulópontja, míg a tétel megfordítása adja az elméleti hátterét annak, hogyan konstruálható többdimenziós eloszlásfüggvény segítségével kopulafüggvény.

A tanulmányban a célom, hogy bizonyos kopulafüggvények segítségével modellezni tudjam több részvény között az összefüggőségi struktúrát. Ennek a struktúrának a segítségével pedig minél pontosabban előre tudjam jelezni a portfólió kockázatát. Ehhez négy ismert kopulát használok, nevezetesen a Gauss, Student, Clayton és Frank kopulákat, melyeket a következőkben ismertetek.

IMPLICIT KOPULÁK

Az implicit kopulákat valamilyen jól ismert eloszlásfüggvényből származtatjuk, és így nem feltétlenül létezik egy zárt formula, amivel leírhatók. Ha ez az eloszlásfüggvény elliptikus, akkor elliptikus kopuláról beszélünk. Ilyenek például a pénzügyi területen igen gyakran használt Gauss és Student t -kopula. Ahogy a nevükből is kiderül az előbbi a normális, míg az utóbbi a Student-féle t -eloszlásból származtatható.

A Gauss kopulaeloszlás-függvénye a következő alakot ölti:

$$C_{\Sigma}^{Ga}(u) = \Phi_{\Sigma}[\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)],$$

ahol Φ jelöli a standard normális eloszlás sűrűségfüggvényét, míg Φ_{Σ} az n -dimenziós normális eloszlás sűrűségfüggvénye nulla várható értékkel és Σ lineáris korrelációs mátrixszal.

A Gauss-kopula esetén mindkét szélén a valószínűségi változókat függetlennek mondhatjuk. Ez azt jelenti, hogy akármilyen magas paraméter értéket választunk is, ha az eloszlásfüggvény szélén elég messzire megyünk, akkor az extrém események egymástól függetlenül következnek be. Vagy másképpen megfogalmazva, ha az egyik változóban magas értéket mérünk, akkor nem valószínű, hogy a másik változó is magas értéket fog mutatni (Rakonczi, 2009).

A kétváltozós Gauss-kopula sűrűségfüggvénye, valamint annak kontúrjai $\rho=0,3$ esetén a 2. ábrán látható.

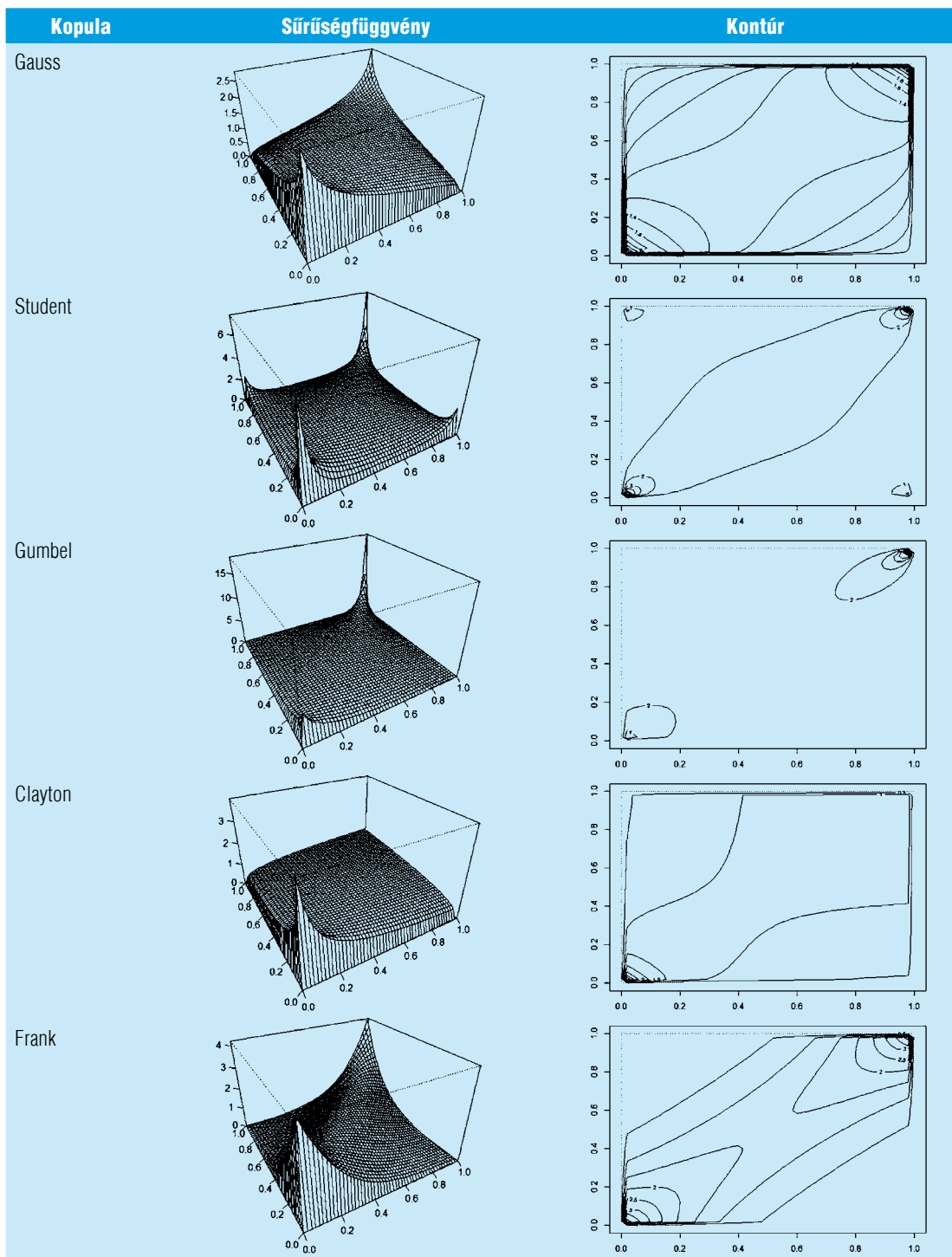
A Student vagy más néven t -kopula a következőképpen írható:

$$C_{v,\Sigma}^t(u) = t_{v,\Sigma}[t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)],$$

ahol t_v az 1-dimenziós, v szabadságfokú Student féle t -eloszlás sűrűségfüggvénye, $t_{v,\Sigma}$ pedig az n -dimenziós Student féle t -eloszlás sűrűségfüggvénye Σ korrelációs mátrixszal. A t -kopulának két paramétere van: v a szabadsági fokok száma, míg Σ (vagy két dimenzióban ρ) a korrelációs mátrix (lineáris korreláció).

A t -kopula esetében minél erősebb a lineáris korreláció, valamint minél kisebb a szabadsági fokok száma, annál erősebb a szélekben való függőség. Megjegyzendő, hogy a Student t -kopula akkor is függőséget mutat a szélekben amikor a ρ értéke negatív (>-1) vagy éppen nulla. A Student t -kopula sűrűségfüggvénye és annak kontúrjai a 2. ábrán láthatók $\rho = 0,3$ és $v = 2$ paraméterek esetén.

A GAUSS, STUDENT, GUMBEL, CLAYTON ÉS FRANK KOPULÁK SŪRŰSÉGFÜGGVÉNYEI ÉS AZOK KONTÚRJAI



Forrás: saját szerkesztés

Észrevehető, hogy a Student t -kopula és a Gauss-kopula hasonlóan viselkedik az eloszlás közepén, viszont teljesen eltérő viselkedést mutatnak a széleken. Annak ellenére, hogy a két esetben a korreláció értéke megegyezik ($\rho = 0,3$) látható, hogy a Student t -kopula esetében mind a négy „sarokban” csúcsosodást tapasztalható, ami azt jelenti, hogy ez a kopula sokkal jobban kifejezi az extrém eseményeket. Például, ha a két valószínűségi változó a veszteséget fejezi ki, akkor a $(0,0)$ pontban lévő kiugró érték azt jelenti, hogy a portfólióban lévő mindkét részvénnel nagyot veszítettünk (Schmidt, 2007).

EXPLICIT KOPULÁK

Ellentétben azokkal a kopulákkal, amelyek az eloszlásfüggvényükből fejezhetőek ki, az explicit kopulák egy viszonylag egyszerű zárt formula segítségével is leírhatóak. Ezen kopulák nagy része az úgynevezett Arkhimédeszi kopulacsaládba tartozik.

Az Arkhimédeszi kopulacsalád a következőképpen definiálható: legyen $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ egy folytonos, szigorúan monoton csökkenő függvény, melyre $\varphi(1) = 0$. Ekkor a

$$C(u_1, u_2) = \begin{cases} \varphi^{-1}[\varphi(u_1) + \varphi(u_2)], & \text{ha } \varphi(u_1) + \varphi(u_2) \leq \varphi(0) \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény akkor és csak akkor kopula, ha φ konvex. Az ebben a formában megadott kopulát Arkhimédeszi kopulának nevezzük, a φ függvényt pedig a kopula generátorának hívjuk.

Ennek a konstrukciónak a segítségével sokféle kopula generálható. Például a $\varphi(u) = (-\ln u)^\theta$ ($\theta \geq 1$) generátor segítségével az úgynevezett Gumbel, vagy más néven Gumbel–Hougaard-kopula, a $\varphi(u) = (u^{-\theta} - 1) / \theta$ ($\theta \in [-1, \infty) \setminus \{0\}$) generátor segítségével az úgynevezett Clayton kopula, míg a $\varphi(u) = -\ln \frac{e^{-\theta u} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ generátor segítségével pedig az úgynevezett Frank-kopula generálható.

Az 2. ábrán látható a 2-dimenziós Gumbel-kopula sűrűségfüggvénye valamint az ehhez tartozó kontúrok $\theta = 2$ esetén, a Clayton-kopula sűrűségfüggvénye, valamint az ehhez tartozó kontúrok, $\theta = 0,3$ esetén, valamint a Frank-kopula sűrűségfüggvénye, valamint az ehhez tartozó kontúrok, $\theta = 5$ esetén.

UTÓTESZTELÉS

Az úgynevezett utótesztelés módszerével fogom megvizsgálni, hogy a történeti vagy pedig a kopulán alapuló kockázatszámítás bizonyul jobbnak. Jobbnak akkor nevezek egy kockázatszámítási módszert a másikkal, ha azzal pontosabban meg lehet becsülni a kockázatot, azaz, ha a tényleges és a becsült értékek között kisebb eltérés tapasztalható.

Az utótesztelés végrehajtásához létre kell hozni az úgynevezett időablakokat (*time-window*). Az irodalomban és a gyakorlatban is ennek értéke leggyakrabban egy év, azaz 250 kereskedési nap ($T = 250$). Az első ablak így az 1. naptól a 250. napig tart. A második ablak a 2. naptól a 251. napig, és így tovább. Az első időablak adatait felhasználva ki lehet számolni a szükséges kockázati mérték értékét az első 250 napra vonatkozóan, amely egyben egy előrejelzés a 251. napra. Ha rendelkezésre áll a 251. napi hozam is, akkor az első időablak alapján számított becsült érték összehasonlítható a valódi hozam értékével. Ekkor már kiszámolható a második időablakra vonatkozó kockázat, amely egy becsült érték lesz a következő napra, azaz a 252. napra vonatkozóan. Ha rendelkezésre áll a 252. napi hozam, akkor a becsült kockázat összehasonlítható a tényleges értékkel. És így tovább, az összes adaton végiglépkedve (Hull, 2006), ahogy azt az 1. táblázatban is összefoglaltam. A kockázatszámítás módszerétől függ, hogy történeti vagy pedig kopulán alapuló utótesztelésről beszélünk.

IDŐABLAKOK

Időablakok	Első nap	Utolsó nap	VaR
1.	1.	250.	251.
2.	2.	251.	252.
3.	3.	252.	253.
⋮	⋮	⋮	⋮
(N-249).	(N-249).	N.	(N+1).

Forrás: saját szerkesztés

Történeti szimuláción alapuló kockázatszámítás

A történeti szimuláció azzal a feltételezéssel él, hogy a múltban történt eseményekkel le tudjuk írni, meg tudjuk becsülni a jövőbeli eseményeket. Vagyis az utótesztelés lényege ebben az esetben, hogy a történeti adatokat felhasználva kiszámoljuk a kockázat értékét, jelen esetben a VaR és az ES értékét, és ezt hasonlítjuk össze a következő napi hozammal.

A VaR esetében ez az összehasonlítás azt jelenti, hogy minden napra vonatkozóan megvizsgáljuk, hogy az adott hozam értéke kisebb-e, mint az arra a napra becsült VaR érték (-1)-szerese, majd összeszámoljuk, hogy hány esetben tapasztaltuk ezt, azaz hány esetben becsülte alá a VaR a tényleges kockázat értékét. Ennek a valószínűsége – a VaR definíciója alapján –, hogy meg kell egyezzen a konfidenciaszinttel, azaz α -val (Daniélsson, 2011). Ez azt jelenti tehát, hogy alfát a mintarealizációból, a VaR definíciója alapján, a következő összefüggéssel becsülhetjük:

$$\alpha \approx \frac{1}{M-1} \sum_{m=1}^{M-1} 1_{\{r_{250}^{m+1} < -VaR_{\alpha}^m\}},$$

ahol VaR_{α}^m jelöli az $m=1, \dots, M$ -edik scenáriumhoz

tartozó VaR értéket α -szinten, r_t^m pedig a $t=1, \dots, T$ -edik időpillanathoz és az m -edik scenárióhoz tartozó logaritmikus hozam értékét. Minél közelebb van a becsült kockázat a ténylegeshez, azaz minél pontosabban becsüljük meg a VaR-el a kockázatot, annál közelebb van ez az érték α -hoz.

A Bázeli Bizottság 2012-ben – az 1996 óta használt VaR kockázati mérték helyett – az ES mint új szabályozói kockázati mérték bevezetését javasolta. A probléma csak az volt, hogy ellentétben a VaR-el úgy gondolták, hogy az ES nem utótesztelhető az úgynevezett elicability tulajdonsága miatt. A legújabb kutatások megoldani látszanak ezt a problémát is, hiszen kimutatták, hogy az ES is utótesztelhető. Az ES esetében az alfát Acerbi és Székely cikke (Acerbi, 2014) alapján, a következő összefüggéssel becsülhetjük a mintarealizációból:

$$\alpha \approx -\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{r_t^m 1_{\{r_t^m < -VaR_{\alpha}^m\}}}{ES_{\alpha}^m},$$

ahol VaR_{α}^m , valamint ES_{α}^m az m -edik scenáriumhoz tartozó VaR és ES értékek α -szinten, r_t^m pedig továbbra is a t -edik időpillanathoz és az m -edik scenárióhoz tartozó logaritmikus hozam érték.

Kopulamodellen alapuló kockázatszámítás

Ebben az esetben, eltérően a történeti szimulációtól, már nem a történeti adatokból számoljuk ki az adott napra vonatkozó VaR , valamint ES értékeket, hanem az úgynevezett kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció segítségével.

A kopulán alapuló Monte Carlo szimuláció segítségével végzett kockázatszámítás lépései a következők (Xu, 2012):

- 1 a kopulamodell kiválasztása (Gauss, Student, Arkhimédészi stb.),
- 2 a peremeloszlások kiválasztása és ezen eloszlások paramétereinek a becslése,
- 3 az adatok áttranszformálása a kopulafüggvény értelmezési tartományába,
- 4 kopulafüggvény illesztése a (transzformált) adatokra, valamint ezen kopulafüggvény paramétereinek becslése,
- 5 a becsült kopulafüggvénynek megfelelő együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező véletlen változók generálása,
- 6 a peremeloszlások inverz függvényét használva véletlen változók generálása,
- 7 a szimulált adatok segítségével a portfólió nyereségének/veszteségének a kiszámítása,
- 8 az 1–7. lépések ismétlése annyiszor, hogy a szimulált eloszlás megfelelően közel legyen a „valódi” eloszláshoz,
- 9 a VaR és ES kiszámítása az eloszlásfüggvény segítségével.

Mivel egyben utótesztelést is végzek, így ezt a kilenc lépést minden egyes időablakra el kell végezni, és a feltételeknek minden egyes időablak esetében igaznak kell lennie.

EMPIRIKUS TANULMÁNY

Az adatok bemutatása

A számításokhoz az adatokat a Budapesti Értéktőzsde honlapjáról (bet.hu) töltöttem le.

Hét részvény, nevezetesen az FHB, MOL, MTELEKOM, OTP, Pannergy, Raba és Richter napi árfolyamadataival dolgoztam 2005. 07. 01. – 2015. 06. 29. között, azaz 10 évre vonatkozóan. Néhány hiányzó értéket az előző napi árfolyamértékkel töltöttem ki (kivéve a hétvégéket), és így egy 2607 értékből álló adatsort kaptam. Ezen adatok megvizsgálásához, elemzéséhez és a számításokhoz az R programot használtam.

Az összehasonlíthatóság miatt – mivel az árfolyam adatok különböző skálákon mozognak – a számításoknál az árakból képzett logaritmikus hozamokat vettem alapul. A részvény logaritmikus hozamát a t -edik időpillanatban a következőképpen definiálhatjuk:

$$R_t^L := \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \ln(1 + R_t^S),$$

ahol P_t a részvény árát, míg $R_t^S := \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}$ a részvény egyszerű hozamát jelölik, a t -edik időpillanatban. A részvényekhez hasonlóan egy n részvényből álló portfólió logaritmikus hozama a következőképpen számítható ki:

$$R_t^L := \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right),$$

ahol $S_t = \sum_{i=1}^n S_{t,i} = \sum_{i=1}^n k_i P_{t,i}$ a portfólióba fektetett pénzmennyiség a t -edik időpillanatban, $S_{t,i}$ az i -edik részvénybe fektetett pénzmennyiség a t -edik időpillanatban, míg k_i az i -edik részvény mennyisége a portfólióban, $P_{t,i}$ pedig az i -edik részvény ára a t -edik időpillanatban.

A százalékban kifejezett logaritmikus hozamokból számolt alapvető statisztikák a 2. táblázatban találhatók. Látható, hogy az FHB-részvény hozama rendelkezik a legnagyobb minimummal, a Raba-részvény hozama pedig a legnagyobb maximummal. Leolvasható továbbá, hogy a hét részvény közül csak a Raba és a Richter rendelkezik pozitív átlaggal, valamint, hogy a szórás az OTP esetében a legnagyobb.

**RÉSZVÉNYEK LOGARITMIKUS HOZAMAINAK ALAPVETŐ STATISZTIKÁI
SZÁZALÉKBAN KIFEJEZVE**

	FHB	MOL	MTELEKOM	OTP	Pannergy	Raba	Richter
Minimum	-19,720	-16,220	-12,573	-16,230	-16,140	-16,229	-12,189
Alsó kvantilis	-1,140	-1,184	-0,905	-1,314	-0,786	-0,900	-0,954
Medián	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
Átlag	-0,024	-0,007	-0,031	-0,009	0,000	0,021	0,012
Felső kvantilis	0,970	1,176	0,860	1,351	0,645	0,852	0,961
Maximum	20,891	14,030	11,680	20,920	13,960	24,701	9,074

Forrás: saját szerkesztés

A számításokhoz egy olyan portfóliót hozok létre, amely minden részvényből pontosan egyet tartalmaz. Az így képzett portfólió logaritmikus hozama a tíz évre vonatkozóan a 3. ábrán látható. A könnyebb áttekinthetőség miatt táblázatba rendezem ezen hozamokat, azaz az adatokat: az első oszlopba kerül az első 250 elem, a másodikba a második 250 elem és így tovább (3. táblázat). Így minden oszlop tulajdonképpen egy időablak, ami az adott esetben megegyezik az úgynevezett szcenárióval. A szcenárió vagy más néven forgatókönyv a jövő egy lehetséges állapotát írja le. Jelölje r_t^m az m -edik szcenárióhoz és t -edik időpillanathoz tartozó hozam értékét, ahol $m=1, \dots, M$ és $t=1, \dots, T$. Az elemezni kívánt adatok esetében $N=2606$, $T=250$, és így $M=2357$. Vegyük észre, hogy a konstrukció miatt például vagy $r_2^1 = r_1^2$ vagy $r_2^2 = r_1^3$.

Történeti utótesztelés

Ahogy bemutattam: a történeti utótesztelés első lépése, hogy minden időablaknál ki kell számolni a VaR , illetve az ES értékét. A gyakorlatban a hozamoknak – mint folytonos valószínűségi változóknak – a mintarealizációjával tudunk számolni. Jelölje továbbra is r_t^m az m -edik szce-

nárióhoz és t -edik időpillanathoz tartozó hozam értékét. A VaR illetve az ES kiszámításához az adatokat növekvő sorrendbe kell rendezni. Jelölje r_t^{m*} az r_t^m elemek ezen növekvő sorrendjének t -edik elemét: $r_1^{m*} \leq r_2^{m*} \leq \dots \leq r_T^{m*}$. Ekkor az úgynevezett α -kvantilis az a k -adik elem, amelynél az elemek α -ad része kisebb $(1-\alpha)$ -ad része pedig nagyobb, azaz $k = [T\alpha] = \max\{m | m < T\alpha, m \in \mathbb{N}\}$. Tehát a legrosszabb α százalék: az r_1^{m*} , $r_2^{m*}, \dots, r_k^{m*}$ elemek. A VaR -et az α -kvantilis (-1) -szeresével közelíthetjük:

$$VaR_\alpha^m \approx -r_k^{m*},$$

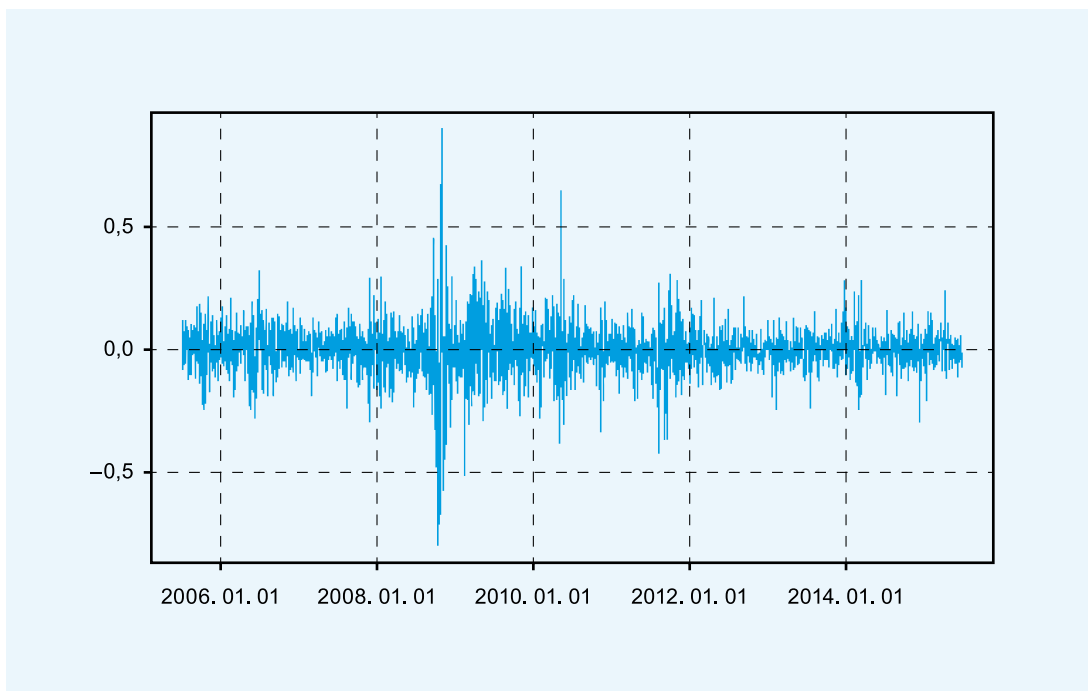
míg az ES -t a legrosszabb százaléknál elem átlagával (Acerbi, 2001):

$$ES_\alpha^m \approx -\frac{\sum_{i=1}^k r_i^{m*}}{k}.$$

Kopulaszimuláción alapuló utótesztelés

Az elemzést az implicit kopulák közül a Gauss és a Student-kopulával, az explicit kopulák közül pedig a Frank-, Clayton-kopulákkal végzem el. Az elméleti részben bemutatott Gumbel-kopulát ki kell zárni az elemzésből, hiszen csak pozitívan korrelált adatok esetén alkalmazható, és ennek igaznak kell lennie minden időab-

A PORTFÓLIÓ NAPI LOGARITMIKUS HOZAMAI 2005. 07. 01 ÉS 2015. 06. 29 KÖZÖTT



Forrás: saját szerkesztés

3. táblázat

A HOZAMOK IDŐABLAKOKBA RENDEZÉSE

		Szcenárió (<i>m</i>)					
		<i>m</i> =1	<i>m</i> =2	<i>m</i> =3	...	<i>m</i> =2356	<i>m</i> =2357
Idő (<i>t</i>)	<i>t</i> =1	r_1^1	r_1^2	r_1^3	...	r_1^{2356}	r_1^{2357}
	<i>t</i> =2	r_2^1	r_2^2	r_2^3	...	r_2^{2356}	r_2^{2357}
	<i>t</i> =3	r_3^1	r_3^2	r_3^3	...	r_3^{2356}	r_3^{2357}
	⋮	⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮
	<i>t</i> =250	r_{250}^1	r_{250}^2	r_{250}^3	...	r_{250}^{2356}	r_{250}^{2357}
		VaR_α^1	VaR_α^2	VaR_α^3		VaR_α^{2356}	VaR_α^{2357}
		ES_α^1	ES_α^2	ES_α^3		ES_α^{2356}	ES_α^{2357}

Forrás: saját szerkesztés

lagnál. Az első időablak vizsgálatokor kiderül, hogy a Raba és a Pannergy között a Kendall-féle tau értéke $-0,004$, ami kizárja a Gumbel-kopula használatának a lehetőségét.

A peremeloszlásoknál az elemzés során az empirikus eloszlásfüggvényeket használom a portfólióban lévő minden egyes részvény eloszlásának becslésére. Természetesen az empirikus eloszlásfüggvényeket minden egyes időablaknál meg kell határozni. Az m -edik időablakban az i -edik részvény empirikus eloszlásfüggvénye

$$F_i^m(x) = \frac{1}{T+1} \sum_{i=1}^T 1_{\{r_{t,i}^m < x\}}(x),$$

ahol $r_{t,i}^m$ jelöli az m -edik időablak, i -edik részvényének logaritmusos hozamát a t -edik időpillanatban. Az empirikus eloszlásfüggvényt az $F_i^m(r_{t,i}) \approx \frac{\text{rank}(r_{t,i})}{T+1}$ egyenlettel közelíthetjük, ahol $\text{rank}(r_{t,i})$ az i -edik részvény t -edik elemének a rangja az adott részvény logaritmusos hozamai alapján számítva. Az így átranszformált adatokat pszeudo-megfigyeléseknek nevezzük, melyek már egyenes eloszlásúak $(0,1)$ a intervallumon, azaz a kopulafüggvény értelmezési tartományán.

A (megfelelő) kopula paramétereinek becsléséhez az úgynevezett kanonikus maximum *likelihood* módszert használom, hiszen ez a becslési módszer az empirikus peremeloszlásfüggvényeken alapszik. Ennek segítségével meg lehet becsülni a kopulaparamétereket anélkül, hogy specifikálni kellene a peremeloszlásokat és azok paramétereit (Yan, 2007).

A becsült kopulafüggvénynek megfelelő együttes sűrűségfüggvénnyel rendelkező véletlen változók generálásában Sklar tétele segít. A tétel alapján tudjuk, hogy $C[F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)] = F(x_1, \dots, x_n)$. Tegyük fel, hogy a peremeloszlások folytonosak és hogy létezik az inverzük: F_i^{-1} , $i = 1, \dots, n$. Bevezetem továbbá az $F_i(x_i) := v_i$ jelölést, és így $x_i = F_i^{-1}(v_i)$. Ezen jelölések felhasználásával Sklar tétele a következőképpen írható: $C(v_1, \dots, v_n) = F[F_1^{-1}(v_1),$

$\dots, F_n^{-1}(v_n)]$. Ebben az esetben tehát a $v = (v_1, \dots, v_n)$ vektor eloszlása a C kopulafüggvénynek megfelelő. A v vektorból a peremeloszlások inverz függvényét használva megkapható az x_1, \dots, x_n szimulált logaritmusos hozam minden egyes részvény esetén, hiszen: $x_1 = F_1^{-1}(v_1) = F_1^{-1}[F_1(x_1)]$, \dots , $x_n = F_n^{-1}(v_n) = F_n^{-1}[F_n(x_n)]$. Ezen szimulált logaritmusos hozamok és a részvényárak ismeretében ki lehet számolni a következő napra becsült részvényárakat. A részvények áraiból pedig kiszámolható azon portfólió logaritmusos hozama, amely minden egyes részvényből pontosan egyet tartalmaz.

Az előzőekben bemutatott lépéseket annyi-szor kell ismételni, hogy a szimulált eloszlás megfelelően közel legyen a „valódi” eloszláshoz. Irodalmi utalások és előzetes saját számítások alapján úgy gondolom, hogy a szimulációt 6000-szer ismételve a „tényleges” és a szimulált eloszlás között az eltérés minimális, a program eléggé stabil. Az így generált eloszlásból kiszámítható a *VaR* és az *ES* értéke.

Az elméleti részben bemutatott kilenc pontot végig kell számolni minden egyes időablaknál, majd az Utótesztelés fejezetben már részletesebben tárgyalt utótesztelés módszerével (vagyis a becsült és tényleges adatok összehasonlításával) letesztelhető a szimuláció pontossága, hatékonysága, mind a *VaR*, mind pedig az *ES* esetében.

Eredmények és következtetések

A szimuláció megírásához az *R* programot, azon belül is a *copula* programcsomagot (Hofert et al., 2014) használtam. Az eredményeket a *VaR* esetében a 4. táblázatban míg az *ES* esetében az 5. táblázatban tüntettem fel. Mivel a módszer pontosságát az határozza meg, hogy a szimuláció segítségével kapott alfa értékek milyen közel vannak az elméleti (eredeti) alfa értékekhez, ezért a táblázatokban látható számok ezen eltéréseket mutatják az

4. táblázat

**A KOPULÁN ÉS A TÖRTÉNETI SZIMULÁCIÓN ALAPULÓ KOCKÁZATSZÁMÍTÁS
UTÓTESZTELÉSÉNEK EREDMÉNYEI A VALUE AT RISK (VaR) ESETÉBEN
SZÁZALÉKBAN KIFEJEZVE**

	VaR				
	Gauss	Clayton	Frank	Student	Történeti
5,0%	0,7749	0,6900	1,4112	0,9023	0,1761
2,5%	0,8121	0,4299	1,4490	0,8121	0,2153
1,0%	0,5287	0,1890	0,9958	0,4013	0,2728

Forrás: saját szerkesztés

5. táblázat

**A KOPULÁN ÉS A TÖRTÉNETI SZIMULÁCIÓN ALAPULÓ KOCKÁZATSZÁMÍTÁS
UTÓTESZTELÉSÉNEK EREDMÉNYEI AZ EXPECTED SHORTFALL (ES) ESETÉBEN
SZÁZALÉKBAN KIFEJEZVE**

	ES				
	Gauss	Clayton	Frank	Student	Történeti
5,0%	0,0125	0,0120	0,0128	0,0123	0,0149
2,5%	0,0133	0,0128	0,0135	0,0130	0,0775
1,0%	0,0142	0,0138	0,0144	0,0139	0,1712

Forrás: saját szerkesztés

adott négy kopulafüggvény, valamint a történeti szimuláció esetén, három kockázati szint (5 százalék, 2,5 százalék, és 1 százalék) mellett.

Csak a történeti szimuláción alapuló utótesztelés eredményeit összehasonlítva elmondható, hogy az ES jobb kockázati mértéknek bizonyult, mint a *VaR* (Miskolczi, 2016).

A kopulafüggvényen alapuló utótesztelés eredményei alapján elmondható, hogy mind a *VaR* mind pedig az ES esetén minden vizsgált alfa szinten a legjobb közelítést a négy kopulafüggvény közül a Clayton kopula adja. A legrosszabbnak pedig a Frank kopula bizonyult, mindkét kockázati mérték és minden vizsgált alfa szint esetén. Általában pénzügyi területen a normál kopulánál a *t*-kopula hasznosabbnak

bizonyul, hiszen a *t*-kopula vastagabb farokkal rendelkezik, mint a normál kopula. Az adatok a legtöbb esetben nem normális eloszlásból származnak és problémát jelent az extrém események modellezése. Ezek az extrém események többször fordulnak elő a valóságban, mint ahogy azt a normális eloszlás feltételezi. A saját adataimon kiszámolt értékek is ezt támasztják alá. Látható, hogy a Gauss-kopula csak 5 százalékos szinten és csak a *VaR* esetén bizonyult jobbnak a *t*-kopulánál. A széleken és az ES esetén a *t*-kopula pontosabban modellezi a kockázatot. Ha a *VaR*-et hasonlítom össze az ES-al azt tapasztalom, hogy az ES minden kopula és minden vizsgált alfa szint esetén sokkal pontosabb, jobb kockázati mér-

téknak bizonyul, ami ismét az *ES* használatát erősíti a *VaR*-el szemben.

Az előzőekben tehát látható volt, hogy bizonyos kopulák pontosabb, míg mások kevésbé pontos modellezését adják a valóságnak. Az is kiderült, hogy az *ES* jobbnak bizonyult a *VaR*-nál mind a történeti, mind pedig a kopulán alapuló szimuláció esetében. Viszont egy további fontos kérdés, hogy a kopulán alapuló szimuláció jobb közelítése-e a valóságnak, mint például a történeti szimuláció.

A *VaR*-nál azt tapasztaltam, hogy a legtöbb esetben a történeti szimuláció pontosabb képet ad a kockázatról, mint a kopula segítségével végzett Monte Carlo szimuláció. Az általam használt adatoknál a kopula módszer egy esetben bizonyult jobbnak: a Clayton-kopula esetén, $\alpha = 1\%$ -os szinten. Ebben az esetben tehát a tekintett négy kopula közül a legjobbnak számító Clayton-kopula segítségével pontosabb képet kaptam az extrém események alakulásáról (melynek mérése igen nehéz feladat), valamint a kockázatról, mint a történeti szimuláció segítségével.

Az *ES* esetében már sokkal inkább egyértelmű eredmények születtek. Mind a négy kopulamodell, mind a három alfa szinten pontosabban becsülte meg a kockázatot, mint a történeti szimulációval végzett kockázatszámítás.

ÖSSZEFOGLALVA tehát elmondható, hogy a kockázatszámítás szempontjából nagyon fontos megvizsgálni a portfólióban szereplő eszközök kapcsolatát, függőségi struktúráját. Hiába diverzifikálunk a kockázat csökkentése érdekében, ha egy bekövetkezett esemény hatására a portfólióban szereplő eszközök vagy azoknak egy része ugyanúgy viselkedik, kioltva ezzel a diverzifikáció hatását. A kopulafüggvények használatával viszont fényt deríthetünk ezekre az összefüggésekre, ami a kockázat pontosabb modellezéséhez vezethet. A kopulafüggvények segítségével végzett szimuláció az utótesztelés módszerével tesztelhető. Az eredményeket összehasonlítva a történeti szimuláció esetével tapasztalható volt, hogy a kopulafüggvény segíthet pontosabb képet alkotni a kockázatról.

IRODALOM

- AAS, K. (2004). Modelling the dependence structure of financial assets: A survey of four copulas. *Research report SAMBA/22/04*, Norwegian Computing Center
- ACERBI, C., NORDIO, C., SIRTORI, C. (2001). Expected shortfalls a tool for financial risk management. *arXivpreprintcond-mat/0102304*
- ACERBI, C., SZÉKELY, B. (2014). Backtesting expected shortfall. *Risk*, 27 (11)
- ARTZNER, P., DELBAEN, F., EBER, J.-M., HEATH, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9 (3): pp. 203–228
- BÉLYÁ CZ I. (2010). Kockázat vagy bizonytalanság? Elméletörténeti töredék a régi dilemmáról. *Közgazdasági Szemle, LVII. évfolyam*, 652–665. oldal
- BENEDEK G., KÓBOR Á., PATAKI A. (2002). A kapcsolatszorosság mérése m -dimenziós kopulákkal és értékpapír portfólió-alkalmazások. *Közgazdasági Szemle*, 49 (2)105–125. oldal
- CHERUBINI, U., LUCIANO, E., VECCHIATO, W. (2004). *Copula Methods in Finance*. John Wiley & Sons
- DANIELSSON, J. (2011). Financial risk forecasting: the theory and practice of forecasting market risk with

implementation in *R and Matlab*, volume 588. John Wiley & Sons

DURANTE, F., SEMPI, C. (2010). Copula theory: an introduction. In *Copula theory and its applications*, Springer, pp. 3–31

EMBRECHTS, P., MCNEIL, E.–STRAUMANN, D. (1999). Correlation: pitfalls and alternatives. *Risk*, 12 pp. 69–71

EMBRECHTS, P., LINDSKOG, F., MCNEIL, A. (2001). Modelling dependence with copulas. *Rapport technique, Département de mathématiques*, Institut Fédéral de Technologie de Zurich

EMBRECHTS, P., MCNEIL, A., STRAUMANN, D. (2002). Correlation and dependence in risk management: properties and pitfalls. *Risk management: value at risk and beyond*, pp. 176–223

GÁLL J., PAP GY. (2010). *Bevezetés a pénzügyi matematikába*. Szegedi Egyetemi Kiadó

HÄRDLE, W., OKHRIN, O., OKHRIN, Y. (2008). Modeling dependencies with copulae. *Applied Quantitative Finance*, pp. 3–36. Springer

HOFERT, M., KOJADINOVIC, I., MAECHLER, M., YAN, J. (2014). copula: Multivariate dependence with copulas. *R package version 0.999–9*. Online: <http://CRAN.R-project.org/package=copula>

HULL, J. C. (2006). *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education India

JORION, P. (1999). *A kockázatos érték*. Panem.

KNIGHT, F. (1921). *Risk, uncertainty, and profit*. Hart Schaffner and Marx prize essays no 31. Boston and New York: Houghton Mifflin

KUNGWANI, P. (2014). Risk management-an analytical study. *IOSR Journal of Business and Management*, 16 (3) pp. 83–89

MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio selection. *The journal of finance*, 7 (1) pp. 77–91

MISKOLCZI P. (2016). A Value at Risk és az Expected Shortfall összehasonlítása történeti szimuláció segítségével. *Sigma*, 47 (3–4) 139–160. oldal

NELSEN, R. B. (2013). An introduction to copulas, volume 139. Springer Science & Business Media

RAKONCZAI, P. (2009). *On modeling and prediction of multivariate extremes with applications to environmental data*. Centre for Mathematical Sciences, Mathematical Statistics, Lund University

SCHMIDT, T. (2007). Coping with copulas. *Copulas: From theory to application in finance*, pp. 3–34

SKLAR, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, 8 pp. 229–231

SZEGŐ G. (2002). Measures of risk. *Journal of Banking & Finance*, 26 (7) pp. 1253–1272

XU, C., CHEN, H. (2012). Measuring portfolio value at risk. *Lund University Libraries*. Student Paper

YAN, J. (2007). Enjoy the joy of copulas: with a package copula. *Journal of Statistical Software*, 21 (4) pp. 1–21