

Móczár József

Ergodikus versus bizonytalan pénzügyi folyamatok

I. rész

Ergodikus hipotézis és bizonytalanság a pénzügyelméletben

ÖSSZEFOGLALÓ: A közgazdaság-tudománynak az emberiség hasznára és jólétének növelésére kell koncentrálnia. Már a 17–18. században vita folyt a merkantilisták és fiziokraták között a piac és az állam szerepéről, ami napjainkig kérdéses. A klasszikus közgazdászok a piac szerepét fatalista intuícióval magyarázták: a piaci mechanizmus hosszú távon automatikusan kialakítja az egyensúlyt, függetlenül a kezdeti feltételektől. A 19. században hasonló elvet fogalmazott meg Ludwig Boltzmann a termodinamikában: az ergodikus hipotézist. Az ergodikus rendszer homogén, állapotában nincs különbség múlt és jövő között, az idő analitikus. Nem ergodikus esetben múlt és jövő között szimmetriatörés van, az idő történelmi. Megmutatjuk, hogy Paul A. Samuelson a klasszikus közgazdászok fatalista intuícióját követte, amit félreérthetően ergodikus hipotézisként jelölt. Paul Davidson ellenvetései ezen a félreértésen alapulnak. John M. Keynes viszont a pénzügyi folyamatokat nem tekintette ergodikusnak, nála a jövő bizonytalan, az állam jelentős. Frank P. Ramsey kritikája alapján vizsgáljuk Keynes valószínűségi logikáját, amely az 'Általános elmélet'-et fátyolként borító bizonytalanság és a hosszú távú várakozás elméletének tudományos módszere a kockázatelemzésében.

KULCSSZAVAK: ergodikus hipotézis, fatalista intuíció, valószínűségi logika, bizonytalanság, kockázatelemzés

JEL-KÓDOK: A1, C1, E6, G1

E tanulmányban az ergodicitást vizsgálom sztochasztikus pénzügyi folyamatok előrejelzésében, elméleti közelítésben. Csak a téma releváns cikkeire és eredményeire fókuszálok, vagyis a nem citált cikkek vagy redundánsak, vagy olyan kérdésekkel foglalkoznak, amelyek következnek e tanulmány elemzéseiből.

A pénzügyi folyamatok vizsgálatában a neoklasszikusok felhasználják az ergodikus hipotézist, náluk a jövő előre jelezhető, míg az institutionális közgazdászoknál nem, a jövőt bizonytalanak kezelik, nem előre jelezhető-

nek. Az előbbieket elméleteiket, modelljeiket, absztrakt axiomatikus és irreális feltevésekre fogalmazzák meg ökonometriai módszerekkel, többnyire newtoni dinamikával; az utóbbiak valós gazdasági és társadalmi feltevések mellett statisztikán alapuló logikai okfejtéssel.

A pénzügyelméleti vitákban az ergodicitás alkalmazásában sok termodinamikai és még több lényeges pénzügyi fogalom maradt homályban, s hamis logikai és filozófiai következtetésekkel, szofisztikával, nem bizonyított állításokkal érvelnek az irodalomban. Itt célkitűzésünk, hogy e hiányosságon javítsunk, ezért az egyes fogalmakat és az eredeti definíci-

Levelezési e-cím: jozsef.moczar@uni.corvinus.hu

ókat megfelelő magyarázatokkal látjuk el, ami segít a bonyolultabb esetek megértésében. (Az idézett angol nyelvű szövegek magyar nyelvre fordítása saját fordítás.)

A cikk I. része 5 fejezetből áll. A 2. fejezetben az ergodik hipotézis eredetét vizsgáljuk. *Maxwell* (1867) bizonyította, hogy termikus egyensúlyban a gázmolekulák sebességeinek eloszlása 'stacionárius'; *Boltzmann* (1884) hipotézise az egyensúly megmaradását fogalmazza meg, függetlenül a gáz kezdeti állapotától, végtelen időben. A hipotézis bizonyos kapcsolatot fogalmaz meg a mikro- és a makrovilág között, ami az elméleti fizika forradalmi változását hozta. A 3. fejezetben *Paul A. Samuelson* 1960-as években írt cikkeiben az ergodik hipotézisnek különböző sztochasztikus pénzügyi modellekre történő alkalmazásait elemezzük, arra a kérdésre keresve a választ, hogy a hipotézis alkalmazását maga a szerző mennyire tekintette új tudományos módszernek vagy csak a klasszikus közgazdászok fatalista egyensúlyfogalma közelítésének. *Paul Davidson* hívta fel a közgazdászok figyelmét az ergodik hipotézisre, a neoklasszikus közgazdászok újabb irreális feltevésére, amely széleskörű vitát és nemzetközi kutatást váltott ki a sztochasztikus pénzügyi folyamatok ergodikusként kezeléséről. A 4. fejezetben, ellentétben az ergodicitással, *John M. Keynes* bizonytalansági elméletét elemezzük az 'Általános elmélet' keretében. *Keynes* a bizonytalansági elméletét saját valószínűségi logikai elméletére építette: nála a valószínűségi reláció parciális implikáció, ahol a bizonyíték csak részben bizonyíték a következtetésre. *Keynes* a valószínűséget úgy értelmezte, mint pozíciók közötti 'parciális következmény' logikai relációjának foka, amely *a priori* meghatározható és ami megmondja, hogy egy tudományos hipotézisre adott induktív bizonyításunk milyen fokban támasztja alá a hipotézist. A valószínűségi logika alkalmazásával *Keynes* a befektetés hozamának sztochasztikus alaku-

lása függvényében vizsgálja a kibocsátás és foglalkoztatás bizonytalanságát. A befektetési döntés nála a hosszú távú hozamvárakozás állapotától függ, amely pszichológiai várakozásállapotok összegzése, megkülönböztetve a rövid távú várakozástól, amelyeket különböző fokú valószínűségeken és bizonyosságon alapuló hipotetikus várakozás alakít. *Keynes* valószínűségi logikájának legnagyobb hatású kritikusa *Frank P. Ramsey* volt: nála az emberek kívánságainak erősségét *szubjektív hasznosság*, hitük erősségét szubjektív valószínűség méri a kockázatos vállalkozásokban, és ezeket kell figyelembe venni. *Keynes* a kritikát csak részben fogadta el, a jövőt továbbra is bizonytalannak tekintette. Elemzéseim bizonyítják, hogy *Frank Knight* bizonytalanság definíciója és *Keynes* bizonytalanság értelmezése különbözik egymástól.

AZ ERGODICITÁS EREDETE: LUDWIG BOLTZMANN

Az ergodicitás kérdése az irreverzibilis termodinamikában merült fel 1884-ben, amikor *Ludwig Boltzmann* (1844–1906) egy zárt termodinamikai rendszer állapotát pontos matematikai kifejezésekkel írta le. Eredménye az elméleti fizika forradalmi fejlődéséhez vezetett, ami *Rudolf Clausius* (1822–1888) és *James C. Maxwell* (1831–1879) mikroszkopikus mechanikai modelljeitől, *Josiah W. Gibbs* (1839–1903) és *Albert Einstein* (1879–1955) makroszkopikus valószínűségi elméletéig ívelt.¹

Boltzmann kutatásainak alapját a *Maxwell* eloszlás képezte, amely a gázmolekulák sebességére vonatkozott. *Maxwell* (1867) bizonyította a molekulák ütközését is magába foglaló mechanikai rendszerre, hogy termikus egyensúlyban a molekulák sebességeinek eloszlása 'stacionárius', ami változatlan marad a molekulák folyamatos összeütközésének köszönhetően. *Boltzmann* kíváncsi volt, hogy vajon a

Maxwell-féle egyensúlyi eloszlás dinamikában a felső határon – amikor a t idő a végtelenhez tart – megmarad-e, függetlenül a gáz kezdeti állapotától. A vizsgálathoz bevezette a relatív idejű valószínűségi eloszlást egy gázmolekulára, amelynek sebessége bizonyos intervallumba esik, miközben továbbra is megtartja a valószínűségi fogalmat relatív számú gázmolekula sebességére. Az ergodikus hipotézis szerint a makroszkopikus gázrendszer, amely objektíve mérhető időben, felcserélhető a megfigyelhetlen és rendkívül komplex mikroszkopikus molekuláris mozgások együtteséből számított átlagos értékkel adott időpontban.

Boltzmann ergodikus hipotézise megengedi a fázistér/együttes átlagot felcserélni a mérhető időátlaggal. Az ergodicitás teljesül, ha a rendszer vagy folyamat időátlaga egyenlő annak együttes átlagával. Az időátlag a megfigyelt trajektória vagy folyamat (idősor) átlaga. Az együttes átlag a rendszer összes lehetséges állapotának átlaga. *Kirstein* (2015) a következőképpen adta meg az ergodicitás definícióját:

DEFINÍCIÓ: A rendszer ergodikus, ha a következő egyenlőség teljesül mértékeire:

Időátlag = Együttes átlag

$$f(x) = \langle f \rangle$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta_t(x)) dt = \frac{\int_S f(x) \mu(dx)}{\mu(S)}$$

ahol S a rendszer energiafelszíne a fázistérben, θ_t a rendszer állapota t időben, μ mérték írja le a térfogatot a fázistérben, f tetszőleges μ integrálható valós értékű függvény, a számláló Lebesgue-integrál.

Az ergodikus rendszer homogén abban az értelemben, hogy nincs különbség múlt és jövő között, ezért az idő analitikus; ez az oka, hogy *Davidson* az esetet „a jövő csupán statisztikai árnyéka a múltnak” (*Davidson*, 2009/b, 328. oldal) megállapítással jellemezte. Nem

ergodikus esetben múlt és jövő között szimmetriatörés van, az idő történelmi.

Ide kívánczik még annak megemlítése is, hogy a dinamikai rendszerek csak általában ergodikusak; ez az állítás először *Andrey N. Kolmogorov* (1954) tanulmányában jelent meg. Kimutatta, hogy interaktív dinamikai rendszerek nagy osztályaira lehet szerkeszteni olyan periodikus pályákat, amelyek az ergodikus felület egy alterére (invariáns tóruszokra) korlátozottak. Más vizsgálatok is ismertek, amelyek gyengítették az ergodikus rendszerek univerzalizációjába vetett hitet. Például *Enrico Fermi*, *John Pasta* és *Stanislaw Ulam* nem harmonikus oszcillátorok összekapcsolt láncainak viselkedését vizsgálták. Azt várták, hogy rendszerük gyorsan eléri a termikus egyensúlyt. Ehelyett periodikus oszcillációkat kaptak, különböző normál móduszú energiában, valamint szolitonokat. *Kolmogorov* elméletét kiterjesztette *Arnold* és *Moser*, ami a KAM-elmélethez vezetett. Ennek az új elméletnek legérdekesebb aspektusa, hogy függetlenül az ergodicitástól, a dinamikai rendszerek véletlenszerű mozgásra vezethetnek.

A klasszikus fizika – még a kvantummechanikával és a relativitáselmélettel együtt is – különböző rendszerek időbeli evolúcióinak viszonylag gyenge modelljeit adta. A fizika determinisztikus törvényei, amelyek egy ponton elfogadható törvények voltak, ma nagyon nagy egyszerűsítéseknek tűnnek. Mind a klasszikus, mind a kvantummechanikában, ha egy rendszer állapota elfogadható pontossággal ismert volt adott időpontban, akkor a jövő (a múlt is) előre jelezhető volt, legalábbis elvileg. Az elméleti keret predeterminálta, hogy a jelen már tartalmazza a múltat és jövőt. A Nobel-díjas *Ilya Prigogine* (1962) kutatásai mindezt cáfolják úgy a fizikában, mint a biológiában; csak különböző lehetséges szcenáriók jelezhetőek előre.

Jelen világunkat különböző szinteken vizsgálva, más és más törvényszerűségeit ismerhetjük meg. A mikrovilág szintjén a kvantumfizi-

ka törvényei mérvadóak, a makrovilág szintjén pedig a kémia és biológia törvényei, míg az univerzum szintjén az Einstein-féle relativitáselmélet elfogadott. A mai fizikai szemlélet alapvető hibája, hogy azt hiszi a mikroból megérthető a makro. Azt tanítják, hogy ezek a szintek csak leírásukat tekintve különbözőek, valójában az egész univerzumunk a mikrovilág elemeiből épül fel. Minél többet tudunk a mikroszkópikus világról, annál többet tudunk az univerzumból. Hasonló szemlélet uralkodik a közgazdaságtanban is: makrofolyamatok alakulását mikroökonómiából kiindulva magyarázzák. A makro- mikro értelmezései erősen vitathatók, mivel a részecskék együttes viselkedése nem következtethető önnön tulajdonságaiból. Ugyanúgy, mint az egyes emberek fogyasztói magatartási tulajdonságaiból sem aggregálhatók hasonló társadalmi viselkedések, ami elméleti bizonyítást nyert a híres DSM-tételekben.²

ERGODIKUS HIPOTÉZIS A PÉNZÜGYEKBEN: PAUL A. SAMUELSON VERSUS PAUL DAVIDSON

Hogy megértsük Samuelson viszonyát az ergodicitással, tanulmányozni kell szakmai fejlődési pályáját, életében egymást gyakran váltogató pénzügyi-gazdasági paradigmákat és hatásait. (Móczár, 2010/b) Samuelson vallotta: ha változnak a feltételek, változnak az elméletek is, és ebben egyedülállóan rugalmas volt. A hibás elméleteket kíméletlenül ostorozta, korrekt volt, de ebben nem ismert ideológiai vagy politikai megalkuvást.³ Ars poeticája sugalmazta, hogy az intellektuális piac árassa be a tudósokat; bár azt is látta, hogy egyes tudósok megítélésében más tényezők is szerepet kapnak. Nem állt meg egyetlen elméletnél, zseniális új eredményeket ért el szinte mindig egyik frontier területen, nagyfokú kreativitás jellemezte mind az institucionális, mind a neo-

klasszikus kutatásaiban, bár élete vége felé csak „kafetéria keynesianusnak” nevezte magát. Volt olyan periódus az életpályáján, amikor a szakma második Nobel-díjat követelt számára.

A fiatal Samuelson figyelmét azokra a módszertani kérdésekre, amelyek teljesen új alapokra helyezték a pénzügyi-gazdasági kérdések tanulmányozását, *Edwin Bidwell Wilson*, fizikus-matematikus harvardi professzor hívhatta fel, aki a legendás híró *Josiah Willard Gibbsnek*, a termodinamika szülőjének volt kedvenc tanítványa. Wilson közvetítésével jutott el Samuelsonhoz a Lotka–Volterra-féle populációdinamika-elmélet, Gibbs termodinamikai elmélete, stabilitásvizsgálatai stb., amelyeket mind beépített disszertációjába (Weintraub 1991).

A teljesen új matematikai nyelvezeten írt disszertációja 1947-ben – még a mai közgazdászok (nemcsak magyar) többsége számára is érthetetlen tartalommal és matematikai technikával – könyv formájában jelent meg, *Foundations of Economic Analysis* címmel. Samuelson disszertációja stílusában is zseniális volt. A lámpás, amely mutatta neki az utat, a matematikai közgazdaságtan és az ökonometria⁴ térhódításában nagy szerepet vállaló Cowles Bizottság volt. Disszertációja megjelenésétől kezdve hosszú ideig Samuelson kutatásai alakították a pénzügyi elmélet fő áramát, amelyet ma tanítványai és az őket követő újabb generációk formálnak.

David Hilbert formalizmusa, a Cowles Bizottság és a Bourbaki matematika hatása alatt írt egy kitűnő tanulmányt a piaci hatékonyságról 1965-ben, amelyben általános sztochasztikus ár-modell keretében matematikai bizonyítást ad megfelelően anticipált árak véletlenszerű fluktuációjáról, bolyongásáról. Veszi az árak idősorát,

$$\{\dots X_{t-2}, X_{t-1}, X_{t+0}, X_{t+1}, X_{t+2}, \dots\},$$

ahol ismertnek tekinti a mai és múltbéli árakat, és felteszi, hogy semmi biztosat nem tud

a holnapi és a jövőbeli árakról, „(...) a legjobb esetben létezik egy valószínűségi eloszlás a jövőbeli árakra” (ugyanott 42. oldal), amelynek alakja egyedül a 0,1,2,... periódusok számától függ, amelyekre megpróbáljuk előre jelezni az árakat a mai és a múltbeli árak ismeretében:

$$\Pr\{X_{t+T}=X \mid X_{t+0}=x_0, X_{t+1}=x_1, \dots\} = P\{X, x_0, x_1, \dots; T\}.$$

A P valószínűségekről felteszi, hogy nem függenek a historikus kalendáriumi időtől, vagy vele együtt változnak. Ebben az értelemben egy 'stacionárius' folyamatot vesz (amely a krónikus inflációval konzisztens).

A következő oldalon Samuelson P -re ergodikusságot tesz fel a felső határon amint $T \rightarrow \infty$. Az ergodikusságból következően írhatjuk:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P(X, x_0, x_1, \dots; T) = P(X),$$

függetlenül (x_0, x_1, \dots) -től

Vagyis a kezdeti feltételektől függetlenül, az ergodikusság hipotézis biztosítja nála az árak előrejelzését.

Samuelson ennél többet nem mond az ergodikusság hipotéziséről, annál is inkább mivel ebben a cikkben magyarázza elsőként és először a jövőbeli árak véletlenszerű sztochasztikus bolyongását (geometriai Brown-mozgását⁵). Tehát semmiképpen sem tesz egyenlőségjelet a kétféle folyamat közé.

Samuelson másik, az ergodikusság hipotézist felhasználó műve 1968-ban jelent meg: a cikk egyértelműen 1932–37 közötti időszakban a klasszikus és neoklasszikus monetarista elméleti közgazdász, P. A. Samuelson „szamárságairól” vall ironiával és önkritikával.

„Lényegében azt hittük, hogy hosszú távon és ideális modellekben a pénz nem számít. A pénz »semleges« lehetett és sok esetben és sok fel-

tételben az a hipotézis élt, hogy az egy jó első vagy végső közelítést adhatta a tényeknek. Hogy biztosak legyünk ebben, Hume, Fisher és Hawtrey azt tanította nekünk, hogy dinamikus feltételek mellett, a pénz növelése »pénzillúzióhoz« vezethet, és tényleges változásokat okozhat – például váltást a hitelező-járadékosztól az adós-vállalkozóhoz, erős megtakarítás-váltást a fogyasztástól a beruházáshoz, a munkanélküliség csökkenését, a nagykereskedelmi árak emelkedését a ragadós kiskereskedelmi árak bérráták mellett etc.

De mindez egy második approximációs szinten volt, ami egy viszonylag múltó fejlődési rendellenességet reprezentált. Továbbá ez arra irányult, hogy az üzleti ciklusok, a pénz és pénzügytan, a közgazdaság történet című alkalmazott kurzusokon tanítsuk inkább, mint a tiszta elméleti kurzusokon. Valós értelemben egy dichotómia volt a fejünkben; skizofrének voltunk, 9:00-tól 9:50-ig egy egyszerű semleges pénz mennyiségi elméletét mutattuk be. Ezután pusztán 10 perc volt, hogy letöröljük a táblákat és 10:00-tól 10:50-ig megvitassuk, hogy az M tervezett növelése hogyan segítené a gazdaságot.” (Samuelson, 1968, pp. 1–2.)

Itt jegyzi meg először Samuelson, hogy „a neoklasszikus közgazdaságtant csak Keynes Általános elmélete után kezdtem érteni, ami felrázott.” (Samuelson, 1969, p. 174.) Ekkor vezette be a Foundation-ban a hasznossági függvénye argumentumába az összes elfogyasztott jószág mellett az M -et, a pénzállományt az összes pénz-árral. A pénz különleges, semleges kvantitatív tulajdonságait azzal ismerte el, hogy a hasznossági függvényéről feltette, hogy az $(M, P_1, P_2, \dots, P_n)$ -ben 0-ad fokú homogén. Az 1968-as cikkben Samuelson őszintén leírja, hogy „hímszamárként” mit követtek el azokban a 20 évvel ezelőtti 'rossz napokban' a klasszikus monetáris elméletben.

A neoklasszikus közgazdaságtan absztrakt feltevéseit⁶ – és a ki- és befizetések időpontjának bizonytalansága miatt – a készpénztartás

fontosságát, bizonyos valószínűségi törvényekkel együtt, hősiesen elfogadták. Képesek lettek volna bebizonyítani, ami intuitíve is nyilvánvaló, hogy az összes M megduplázása (*ceteris paribus*) pontosan megduplázná az összes árat és értéket hosszú távon, ami az abszolút árszintben nem lesz hatással a reál outputokra és inputokra, az arányokra és *terms of trade*-re, a kamatlábra és a tényező részesedésekre.

Ezt követően Samuelson számunkra most érdektelen, de fontos kérdéseket tárgyal: *Patinkin* pénzelméletét, az $MV=PQ$ cambridge-i egyenletet és egy maximum feladatot, ahol a célfüggvény argumentumában a bére adott vagyontárgyak bevételeivel és bértömeggel kiegészített fenti hasznossági függvény szerepel.

Ami most számunkra érdekes, az az újonnan bevezetett pénz allokálása az emberek között. Az első megoldásban egy fontos szimmetria játszik szerepet: az új pénzt pontosan ugyanolyan arányokban osztják szét, mint az előbbi M -et. Ha viszont szüneteltetjük a szimmetriafeltevést, feltéve az összes jövedelem-elaszticitást és bevezetve M -re, azok (közel) egységnyiek, sohasem számít (sokat), hogy a dolgok hogyan kerülnek szétosztásra az emberek között.

Végül, és ez fontos most számunkra, van egy implicit és explicit feltevés a klasszikus közgazdász fejében, jegyzi meg Samuelson: egyértelmű, hosszútávon előálló egyensúly, függetlenül a kezdeti feltételektől. Ez a klasszikusok fatalista intuíciója volt, emlékezzünk csak Hayekre, aki mindvégig ezt hangoztatta Keynes-sel folytatott vitájában,⁷ amit Samuelson „ergodikus hipotézisnek” nevez a Boltzmann-fogalom analógiájára.

Explicit értelmezésben egy leegyszerűsített modellt értelmez ergodikus tulajdonsággal. Felteszi, hogy a népesség fele férfi, fele nő. Mindegyik a mai pénzének háromnegyedét saját termékére, egynegyedét a másik nem termékére költi, amelyek valószínűségi értékek.

Ezt a következő Markov valószínűségi átmeneti mátrix mutatja:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{a}{2} & \frac{1}{2} - \frac{a}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{a}{2} & \frac{1}{2} + \frac{a}{2} \end{bmatrix}, \text{ ahol } a = \frac{1}{2}, \text{ és így}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{a^t}{2} & \frac{1}{2} - \frac{a^t}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{a^t}{2} & \frac{1}{2} + \frac{a^t}{2} \end{bmatrix},$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} A^t = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ ergodikus állapot.}$$

Könnyen belátható, hogy az „ergodikus” állapot teljesen független a kezdeti feltétektől; ha $4/5$ és $1/5$ a kezdeti feltétel, fentivel teljesen megegyező levezetés teljesül az új Markov valószínűségi átmeneti mátrixra, azzal a különbséggel, hogy most $a=3/5$. Tehát az ergodikus állapot most $a=3/5$ esetén áll elő. Az analógia formálisan teljesül Boltzmann értelmezésével, de míg a Markov-dinamika ergodikus állapota ’statikus’, addig az ergodikus hipotézist a termodinamikában az állandó mozgásban lévő molekulák ’stacionárius’ sebessége jelöli, tehát dinamikus.

Samuelson 1968-as cikkét (*R. W. Clower* szerkesztésében) egy 1969-ben megjelent tanulmánykötet újra közölte (Samuelson, 1969). Davidson ebben talált rá a számára érdekes bekezdésre, ami a további szakmai tevékenységét meghatározta egészen napjainkig.

„Now, Paul Samuelson, aged 20 a hundred years later, was not Harriet Martineau or David Ricardo; but as an equilibrium theorist he naturally tended to think of models in which things settle down to a unique position independently of initial condition. Technically speaking, we theorists hoped not to introduce

hysteresis phenomena into our model, as the Bible does when it says, 'We pass this way only once' and, in so saying, takes the subject out of the realm of science into the realm of genuine history." (Clower, 1969, pp. 184–185).

Az első rész világos, a 20 éves Samuelson is elfogadta a klasszikusok fatalista intuícióját: egyértelmű, hosszútávon előálló egyensúly, függetlenül a kezdeti feltételtől,⁸ amit később, félreérthetően, ergodikus hipotézisnek nevez. Viszont nem könnyű megérteni, hogy pontosan mit is jelent az idézet utolsó mondata a 'bibliai példabeszéd' beszúrásával. A megértés kulcsa a hysteresis-jelenség, amelyet Samuelson, a teoretikusokkal együtt, nem óhajtott bevezetni modelljükbe, „*mint a Biblia teszi, amikor azt mondja, 'Mi csak egyszer megyünk ezen az úton' és, így szólva, a kérdést kivieszi a tudomány birodalmából a valódi történelem birodalmába.*”

Ennek a bekezdésnek az értelmét értette félre Davidson (1981–82; 1991; 1996) részben Samuelson hibájából, amikor azonosnak vette a klasszikusok fatalista intuícióját az ergodikus hipotézissel és Samuelsonnak tulajdonította a 'félrevezető következtetését', hogy az ergodikus axióma *sine qua non* a pénzügyek tudományos módszerében. Bár Lucas és Sargent (1981) is kinyilvánította Davidsontól függetlenül, hogy az ergodikus axióma egyedüli tudományos módszer a közgazdaságtan művelésében.

A mainstream neoklasszikus közgazdaságtan több művelője (Lucas, Cochrane, Sargent, Stiglitz, Mankiw, Scholes stb.) vagy explicite, vagy implicite feltették, hogy a megfigyelhető gazdasági eseményeket ergodikus folyamat generálta, hangzik Davidson (2009/b) kritikája. De mi is az ergodikus axióma Davidson szerint? Az ergodikus axióma azon a feltevésen alapul, hogy a jövőt már predeterminálják a létező paraméterek. Következésképpen, a jövő megbízhatóan előre jelezhető a múlt és a folyó piaci adatok elemzésével kapott valószínűségi eloszlással, amely irányítja a jövőbeli eseményeket.

Másképpen fogalmazva, ha a jövőbeli eseményeket feltehetően ergodikus sztochasztikus folyamat generálta, akkor a jövő determinált⁹ és feltárható a múlt a mai adatok megfelelő valószínűségi statisztikai elemzésével, tekintettel a piaci alapokra. Ha a rendszer nem ergodikus, a múlt és jelen statisztikai adatai alapján számított valószínűségi eloszlások nem nyújtanak statisztikailag megbízható becsléseket a jövőbeli események valószínűségeire.

Érdekes, hogy Davidson kritikája elkerülte Samuelson (1976) harmadik tanulmányát, amely ergodikus valószínűségi eloszlás bevezetésével vizsgálja az ár-oszcillációkat a híres pókhálómodell sztochasztikus változatában. Ennek az lehet az oka, hogy itt Samuelson már nem egyszerűen az ergodikus hipotézis kifejezést használja, helyette ergodikus (értsd stacionárius) valószínűségi eloszlást¹⁰ tesz fel, ezzel erősíti meg a klasszikusok fatalista intuícióját: a hosszú távon előálló egyértelmű egyensúlyt, amely független a kezdeti feltételektől.

„*Amit szeretnék itt elvégezni, az, hogy megmutassam egy 'stabil' sztochasztikus folyamat igazi természetéből (hogy valódi értelemben végül is elfelejtjük a múltját, és ezért várható, hogy a távoli jövőben egy ergodikus valószínűségi eloszlást közelítsünk), ami mind elkerülhetetlen, mind megfelelő, hogy a lehető legjobb előrejelzést tegyünk – nem számít mi a megfigyelt függő változó tulajdonsága, mivel, például a várható értékét, vagy számtani átlagát, mediánját, geometriai átlagát, vagy bármilyen más paramétereit feltételesen írjuk le, a legkisebb négyzetek használatával¹¹ vagy anélkül – érzéketlenné kell válnia a most kéznél levő adatokra.*” (Samuelson, 1976, p. 2.)

A pókhálómodell sztochasztikus változatában az árakat és a mennyiségeket (a termést) véletlen változóknak veszi a feltételes Markov-valószínűségek definiálásával.

„*Adott a nemlineáris rendszer erősen csillapító tulajdonsága, megmutatható, plauzibilis reguláris feltételek mellett, hogy a feltételes va-*

lósínúségek egy ergodikus valószínűségi eloszlást közelítenek, ami független a kezdeti p_0 -tól (ártól).” (Samuelson, 1976, p. 5.)

Samuelson, legjobb tudomásom szerint, soha többé nem használta ki az ergodikus axiómát a sztochasztikus vizsgálataiban, amit magyarázhat Robert Lucas racionális várakozások elméletének megjelenése (a tanulmány II. részében elemezzük) vagy Samuelson által felvázolt hatékony piacelmélet, amelyet végül is Eugene Fama dolgozott ki a maga teljességében. Mindkét közgazdász később Nobel-díjat kapott.

Paul Davidson az ergodikus hipotézis beemelését a pénzügyi közgazdaságtanba Samuelsonnak tulajdonítja, amikor a 1965-ös és az 1968-as cikkében megjelenő sztochasztikus pénzügyi folyamatok kezdeti feltételektől független egyensúlyi állapotát az ergodikus axióma feltevésével igazolja. Azt az állítást, hogy az ergodikus axióma a közgazdaságtan tudományos módszerének „*sine qua non*”-ja lenne, számos közgazdász erősen vitatja.¹² Mindenesetre Davidson cikkei széleskörű nemzetközi kutatást váltottak ki az ergodikus és nem ergodikus sztochasztikus pénzügyi folyamatok területén.

Az utolsó 5. fejezetben majd rámutatok, hogy milyen módszerek és modellek igénylik az ergodicitás elfogadását. Most a kérdés az: Samuelson mi ösztönözte, különösen az 1968-ban megjelent cikkében, az ergodikus hipotézis használatára? A választ maga Samuelson adta meg, először a Foundation című disszertációjával, később a klasszikus és neoklasszikus elméletek irreális feltételek mellett kimondott állításainak fizikai analógiák felhasználásával történő bizonyításával. Ahogyan a matematikát a természettudományok királynőjének tartották, hihetetlen ambíció vezérelte mindvégig a szakmai pályáján, hogy a közgazdaságtant is ’kemény’ tudománnyá (mint a fizikát vagy a csillagászatot) és a társadalomtudományok királynőjévé tegye. Ebben a törekvésében – mint bemutattuk – kritika nélkül elfogadta és ráadásul félreérthetően felhasználta az ergodikus hipotézist

is: bár mindössze háromszor élt érvelésében az ergodikus kifejezéssel életpályáján.

Davidson ’oknyomozói’ munkássága viszont ráirányította a közgazdászok figyelmét az ergodikus hipotézisre, és ennyiben a neoklasszikus elmélet újabb irreális feltevését helyezte reflektorfénybe. A postkeynesiánusok kánonja zajosan ’visszhangozza’ Davidson logikai és filozófiai ’szólamait’ az ergodikus vs nem ergodikus hipotézisről, Samuelson cikkeinek elemzésében felvetett találgatásairól, miközben módszertani szempontból, többnyire mindvégig a felszínen marad. Megjegyzem, legjobb tudomásom szerint, Samuelson sohasem reagált Davidson cikkeire, amit elegáns véleményének is tekinthetünk.¹³ Szerintem Davidson nem is annyira az ergodikus hipotézisnek a pénzügyi elmélet irreális feltételei közötti szerepeltetése érdekelte; annál sokkal jobban vonzotta Keynes elmélete, amely fókuszába helyezte a jövő bizonytalan kezelését, vagyis akinek elmélete még csak meg sem említette az ergodikus hipotézist. Robert Skidelsky (2009) egyik leghíresebb szerző Keynes munkásságáról, következőképpen laudálta Davidson (2009/a) könyvét:

„Paul Davidson tartósan támadta a hagyományos [neoklasszikus] közgazdaságtant, mivel figyelmen kívül hagyta Keynes bizonytalanságának fontosságát, és a pénz, mint értékmegőrző használatát a gazdasági válságok okozásában. Ebben a világos új könyvben megvilágítja azokat az intellektuális hibákat, amelyek gazdasági világválsághoz vezettek és bemutatja, hogy Keynes elmélete hogyan segíthet létrehozni egy ’civilizált gazdasági társadalmat.’” (Skidelsky, 2009)

JOHN M. KEYNES (1883–1946): A JÖVŐ BIZONYTALAN

A közgazdászok akadémiai közösségén belül mára csak a ’Post-keynesi Iskola’ maradt hű Keynes ’Általános elmélet’-ének tanításaihoz.

A régi klasszikusok, az újklasszikusok és az újkeynesiek tagadják Keynes örökségét, amikor elfogadják az ergodikus axiómát, amely szerint 'bármely jövőbeli adat a jelen és múlt adatainak statisztikai árnyéka'. Ráadásul az újklasszikus Robert Lucas burkoltan támadta Keynest, amikor azt írta a Chicagói Egyetem 2000-es évek eleji kiadványaiban, hogy a közgazdasági szemináriumokon Keynes nevét a teremben suttogás és kuncogás kíséri. Akkortájt, bár sokak szerint vitathatóan, Lucast kiáltották ki a világ legsikeresebb makroközgazdászának, és úgy tűnt, Keynes recessziós elmélete – amely a 2. világháborút követően egy generáción keresztül dominálta a gazdaságpolitikát – Nyugat-Európában sőt az USA-ban is a múlté. Azonban a 2008-as globális pénzügyi és gazdasági világválság¹⁴ rácaffolt Lucasra, a 'racionális várakozások elmélete' teljesen használhatatlannak bizonyult a világválság leküzdésében. Nemcsak hogy nem javasolt semmilyen megoldást, de többé-kevésbé azt állította, hogy a piaczgazdaságok feltehetően nem tapasztalhatnak olyanféle problémákat, amelyeket egyéb gazdaságok tapasztalnak.

Kétségtelen, John M. Keynes a 20. század legsikeresebb társadalomtudósa volt. Munkásságát keynesi forradalomnak nevezik, amit három területen fejtett ki: az állami gazdaságpolitikában, a specifikus politikai filozófiában és a pénzügyi közgazdaságtanban. Mi most az utóbbival foglalkozunk, azon belül is előbb a bizonytalansági elméletével, majd a bizonytalanság vonulatával az 'Általános elmélet'-ben.

A bizonytalanságot tudományos alapon vizsgálta, amelyet a formális logikára felépített 'A Treatise on Probability' című értekezése szolgáltatott. Az értekezés máig foglalkoztatja a valószínűség-elmélettel és matematikai logikával foglalkozó tudósokat, ugyanis szakított a valószínűségszámítás hagyományos matematikai értelmezésével. Itt nem foglalkozom a különböző kritikákkal, határesetekkel stb., kifejezetten csak Keynes (1921) műve alapján

vizsgáljuk valószínűségi logikáját, hogy megértessük az 'Általános elmélet'-et fátyolként beborító bizonytalanságot.

Keynes valószínűségi logikája

Keynes a valószínűséget a formális logika¹⁵ elemeként értelmezte; két állítás közötti logikai relációként, pontosabban implikációként.

„*Premisszáink álljanak a h* *propozíciók tetszőleges halmazából és következtetéseink az a* *propozíciók tetszőleges halmazából állnak; akkor ha egy h tudása igazolja az α fokú racionális hitet az a-ban, mondhatjuk, hogy van egy α fokú valószínűségreláció a és h között.* (Ez írható $a/h = \alpha$ alakban). *A hétköznapi beszédben a konklúziót gyakran kétségeként, bizonytalanként vagy csak valószínűként írjuk le.*” (Keynes, 1921, p. 4.)

Ennek oka, hogy a hagyományos teljes implikáció (például 'Judith egy vénkisasszony, ezért Judith nő.') helyett, nála a reláció egy parciális implikáció (Keynes, 1921, p. 52.), ahol a bizonyíték (jelöljük *h*-val) csak részben bizonyíték az *a* következtetésére. Keynesnél egy valószínűségi reláció, *a/h* szimbólummal jelölve, azt állítja, hogy *h* parciálisan implikálja *a*-t. Például legyen az *a*: 'János egy orvos' és *h*: 'János orvos családból van'. Nyilvánvaló: csak azért, mert János orvos családból van, nem jelenti szükségszerűen, hogy orvos, de bizonyíték lehet, hogy az.

Itt lényeges kiemelni a későbbiek kedvéért, hogy Keynes a valószínűséget úgy értelmezte, mint *propozíciók közötti „parciális következmény”* logikai relációjának foka, amely a priori meghatározható, és amely megmondja, hogy egy tudományos hipotézisre adott induktív bizonyításunk milyen fokban támasztja alá a hipotézist. Keynes értelmezésében a valószínűség nem létezik abszolút értelemben, hanem csak két *propozíció között*. Nincs értelme azt mondani, hogy az *a* *propozíciónak* saját valószínűsége van; csak akkor lehet való-

színősége, ha bizonyítékhoz kapcsolt. Továbbá ez a valószínűségi reláció változhat a bizonyíték szerint. Például az a/g valószínűségreláció különbözik az a/h -tól vagy b/g -tól. Ezek mind különálló és különböző valószínűségrelációk.

Ezek a valószínűségi relációk objektívek, ahogyan minden más logikai reláció is. Keynes a szubjektivizmus két típusát különbözteti meg: a szubjektivizmust mint önkényest és mint az objektív feltételek által determinált fogalmat. Ezek közül az utóbbit fogadja el. Logikai intuíción keresztül érthető és érzékelhető, amely nem azt jelenti, hogy bárki észlelheti őket; ha valaki hamis logikai intuícióval rendelkezik, akkor nem észlelheti őket. Ez nem jelenti azt, hogy az emberek egy adott konklúzióra ugyanazon valószínűségekkel reagálnak: ha különböző bizonyítékuk van, akkor különböző valószínűségi fokkal fogadják el a következtetést.

„Ennyiben tehát a valószínűség szubjektívnek nevezhető. De a logika szempontjából fontos, a valószínűség nem szubjektív. Vagyis, ez nincs kitéve emberi szeszélynek. Egy proposíció nem valószínű, mert azt úgy gondoljuk. Ha egyszer a tényeket adják meg, amelyek meghatározzák tudásunkat, ami valószínű vagy valószínűtlen e körülményekben, objektíven rögzítésre került és független a véleményünktől. Ezért a Valószínűség elmélete logikai, mert a hit fokával foglalkozik, ami az adott körülmények között racionális, hogy figyelemmel kísérjük, és nem pusztán egyes egyének tényleges hitével foglalkozik, amely lehet vagy nem, racionális.” (Keynes, 1921, p. 4.)

A valószínűség értelmezése ezzel a logikai struktúrával azt jelenti, hogy nem minden valószínűség hasonlítható össze egymással; például, nem kérdezhetjük, vajon a/h nagyobb vagy kisebb, mint b/g , mivel mind a bizonyítékok, mind a konklúziók különbözőek. Ha ugyanazon bizonyítékkal rendelkezünk egy valószínűségi sorozatra (például: a/h , b/h , c/h) vagy különböző bizonyítékokkal (például: a/h , a/hg , a/hgj), akkor a valószínűségek összehasonlíthatók. Keynes ezt a következőképpen vázolja:

„Fenntartom (...), hogy vannak bizonyos valószínűségi párok, amelyek tagjai között a nagyság szerinti összehasonlítás nem lehetséges; mindazonáltal, azt mondhatjuk bizonyos valószínűségreláció-párokról, hogy az egyik nagyobb, a másik kisebb, bár nem lehetséges mérni a differenciát közöttük; és hogy egy nagyon különleges esetre (...) értelmezhetjük a nagyságrend szám-szerű összehasonlítását.” (Keynes, 1921, p. 34.)

Mindezek tükrében mondhatjuk, hogy Keynes formálisan elemezte valószínűségeit, egy parciális sorrendként (azaz tranzitív, de nem teljes) a következő tulajdonságokkal: az összes valószínűség a lehetetlenség és a bizonyosság, az $\alpha=0$ és az $\alpha=1$ között van (Keynes, 1921, p. 128.), a valószínűségek bizonyos részhalmazai a kölcsönösen összehasonlítható elemek 'rendezett sorozata'. Egy valószínűség lehet egynél több ilyen sorozat eleme és minden numerikusan mérhető valószínűség egy közös rendezett sorozathoz tartozik.

Más esetekben az összehasonlítás lehetetlen. De ha az összehasonlítások lehetségesek is, sok esetben még mindig nem adható meg numerikusan a valószínűség. Numerikus valószínűség egyedül akkor lehetséges, ha állíthatjuk, hogy az indifferencia elv fennáll bizonyos alternatívák között, azaz, ha két érvnek egyenlő releváns bizonyítéka van és nincs bizonyíték, hogy megkülönböztessük őket, lévén különbözőek, akkor egyenlő valószínűségeket kell adni nekik. Legyen erre példa az ismert pénzfeldobás! Jelölje h : szabályos érmével dobunk, x : fejet dobunk, és y : írást dobunk. Ekkor $x/h=y/h$ és $\alpha=1/2$.¹⁶ A közvetlen összehasonlítás másik esete: $x/(h_1 \wedge h)=x/h$, ilyenkor h_1 premisszát irrelevánsnak mondjuk. Keynes tehát megengedte bizonyos valószínűségeinek, hogy numerikus értékeket vegyenek fel, azonban „(...) azok az esetek, ahol pontos numerikus mérés lehetséges, nagyon korlátozott osztály, általában olyan bizonyítéktól függ, amely az egyenlő valószínűség megítélését garantálja az Indifferencia Elv alkalmazásával.” (Keynes, 1921, p. 160.)

Keynes valószínűségi elmélete intervallumbecslésű valószínűségi elmélet. Mit jelent ez? Vegyük a következő átfedő intervallumbecsléseket: (0,45 ; 0,60) és (0,50 ; 0,65). Ezekbe az intervallumokba eső valószínűségreláció-párok nem mindig 'nagyobb valószínűséggel vannak, mint nem, vagy kevésbé valószínűek, mint nem vagy olyan valószínűek, mint nem'. Ezen valószínűségek egyike sem teljesül, közöttük nem lehetséges a nagyság szerinti összehasonlítás. Viszont a (0,45 ; 0,50) és (0,51; 0,52) közös résszel nem rendelkező intervallumokba eső valószínűségreláció-párok olyan példát mutatnak, ahol az egyik nagyobb és a másik kisebb fennáll, de nem lehetséges mérni közöttük a különbséget.

„A pontatlan numerikus összehasonlítás köre azonban nem teljesen korlátozott. Sok valószínűség, amelyek képtelenek a numerikus mérésre, mindazonáltal elhelyezhető numerikus korlátok között. És a különleges nem-numerikus valószínűségek standardként (kiemelés M. J.) vételével, nagyszámú összehasonlítás vagy közelítő mérés válik lehetségessé. Ha elhelyezhetünk egy valószínűséget egy nagyságrendben bizonyos standard valószínűséggel, összehasonlítással nyerhetjük annak közelítő mértékét.

Ezt a módszert gyakran alkalmazzák az átlagos beszélgetésben. Amikor megkérdezzük, mennyire valószínű valami, gyakran a kérdésünket – Ez többé-kevésbé valószínűbb, mint az így és így? – formában tesszük fel, ahol az 'így és így' egy bizonyos összehasonlítható és jobban ismert valószínűség. Így információt szerezhetünk olyan esetekben, ahol lehetetlen lenne bármilyen számot tulajdonítani a kérdéses valószínűségnek. Darwin egy számszerű határt adott egy nem numerikus valószínűségre, amikor Lyell-lal folytatott megbeszélésről azt gondolta, nem valószínűbb, hogy majdnem minden ponton igaza lenne annál, mintha feldobna egy penny-t és 20-szor fejre esne. Hasonló esetek és mások is, ahol a valószínűség, amelyet az összehasonlítás standardjának veszünk, önmagában nem numerikus, és mint

Darwin példáján a nem numerikus valószínűség az olvasó számára könnyen előfordul.” (Keynes, 1921, pp. 160–161)

Még specifikusabb az a gondolat, hogy a valószínűségek lehetnek 'nem numerikusak' egy nagyon különleges jelentéssel (Keynes, 1921, 15. fejezet). Ez speciálisan azt jelenti, hogy a valószínűségeknek mérhetőeknek kell lenniük egy skálán, amely elfogadja a valószínűség axiómáit. Különösen el kell fogadnia az additivitási axiómát: $P(x \vee y) = P(x) + P(y)$, ahol x és y egymást kölcsönösen kizáró állítás. Ez nem utal arra, hogy megfelelő szám önmagában hozzárendelhető-e egy valószínűséghez, hanem, hogy vajon mérhető-e egy intervallumskálán.

Bizonyos valószínűségek bár számszerűen nem mérhetők, de továbbra is rangsorolhatók:

„Ezekben az esetekben talán nagyságrendbe rendezzük a valószínűségeket, (...) bár nincs alapja annak a becslésnek, hogy mennyire erősebb vagy gyengébb az [a valószínűség], mint a [másik].” (Keynes, 1921, p. 29.)

Néhány valószínűség azonban nem lesz ordinálisan összehasonlítható:

„Amikor sétálni indulunk, az eső-várásunk mindig valószínűbb lesz, mint nem, vagy kevésbé valószínű, mint nem, vagy olyan valószínű, mint nem? Kész vagyok azzal érvelni, hogy ezen esetek némelyikére ezen alternatívák egyike sem teljesül (...).” (Keynes, 1921, p. 30.)

Végül egy másik fontos eleme Keynes valószínűségelméletének a súly fogalma. A súly a bizalom szintjéhez kapcsolódik, amivel rendelkezünk egy valószínűségi reláció következtetésében. Új bizonyíték néha csökkenteni fogja egy érvelés valószínűségét, de mindig növeli annak súlyát. A nyilvánvaló súly mérése hasonló nehézségeket jelent azokhoz, amelyekkel találkozottunk a keynesi valószínűség mérésében. Csak az esetek egy korlátozott osztályában hasonlíthatjuk össze két érvelés súlyát, de annak mindig lehetségesnek kell lennie, ahol két érvelés konklúziója megegyezik. Ez közvetlenül a releváns bizonyíték teljes

mennyiségéhez kapcsolódik, amelyet azon valószínűségi ítélet foglal magába. Ez azt jelenti, hogy minél relevánsabb bizonyíték létezik egy valószínűségre – akár pozitív akár negatív – annál nagyobb a súly. A súly befolyásolja a döntéseket, mivel egy alacsonyabb súly kisebb bizalmat ad valószínűségben az ügynöknek és így kevésbé valószínű, hogy azon valószínűségi opciót választja. Például adott két opció, az egyik magas súlyú valószínűségi kimenettel és a másik alacsony súlyú valószínűségi kimenettel, ha mindkettő hasonló következtetésekkel és valószínűségi szintekkel rendelkezik, akkor hajlamosak vagyunk választani a magasabb súlyú opciót. (Keynes, 1921, Chapter VI)

Bizonytalanság Keynes 'Általános elmélet'-ében

A post-keynesiánusok hevesen érvelnek, hogy a valószínűségi logika közvetett alkalmazásával a bizonytalanság központi része Keynes 1936-os 'Általános elmélet'-ének, különösen a hosszú távú várakozások elméletében (12. fejezet). Itt implicite a valószínűségi logikáját használta fel a bizonytalanság bevezetésére. Hogy ezt pontosan megértsük, könyvét együtt vizsgáljuk az 1937-ben 'The General Theory of Employment' címmel megjelent cikkével, amit kifejezetten könyvének összegzése és megvédése miatt írt.¹⁷ A bizonytalanság majdnem az egész könyvében jelen van; mi most az egyik legfontosabb és legvilágosabban kifejtett példáján keresztül mutatjuk be.

Keynes az 'Általános elmélet' 11. fejezetében amellel érvel, hogy a befektetés nagysága kulcstényező a gazdaság, mint egész teljesítményének meghatározásában. Azt a kibocsátási szint és a foglalkoztatás mint egésznek, a *causa causans*-jaként tekinti. Ezért Keynes befektetési elemzéséből indulunk ki, amit a bizonytalanság prototípusának is tekinthetünk könyvében. Három fogalmat vizsgálunk, ame-

lyeket Keynes bevezet ebben az összefüggésben, mégpedig a várható hozamot, a befektetés keresleti, és kínálati árát. Keynes a várható hozamot a következőképpen definiálja:

„Ha egy ember befektet vagy tőkeeszközt vesz, jogot vásárol a várható hozamok sorozatára, amelyet kibocsátásának eladásából vár, hogy kap, miután a kibocsátás értékesítéséből a folyó költségeket levonják a vagyon élettartama alatt. Ez az évjáradék-sorozat, Q_1, Q_2, \dots, Q_n , amit megfelelő a befektetés várható hozamának nevezni.” (Keynes, 1936, p.135.)

A befektetés várható hozama mellett Keynes a tőkeeszköz *kínálati árán* nem azt a piaci árat érti, amelyen a kérdéses típusú eszköz ténylegesen megvásárolható a piacon, hanem azt, amely még éppen rábírna egy gyártót, hogy termelje újra az ilyen típusú eszköz egy további egységét, amit pótlási (újraelőállítási) költségnek nevez. Elméletében egy tőkeeszköz várható hozama és annak a kínálati ára vagy pótlási költsége közötti reláció, azaz azon típusú tőke egy további egységének várható hozama és az egység előállítás költsége közötti hányados definiálja az azon típusú tőke marginális hatékonyságát. Még pontosabban: a tőke marginális hatékonyságát Keynes úgy definiálja, mint amely egyenlő a diszkontrátával, amely az évjáradék-sorozatok jelen értékét adottnak veszi a tőkeeszközből várt jövedelemmel az élettartama alatt, amely éppen egyenlő a kínálati árral. Ezek az egyes tőkeeszköz típusok marginális hatékonyságai. Ezen marginális hatékonyságok közül a legnagyobb a tőke általános marginális hatékonysága.

Megjegyezzük, hogy itt a tőke marginális hatékonyságát a tőkeeszköz várható hozama és a folyó kínálati ára kifejezésekben definiáljuk, amely függ a várható jövedelmi rátától, amely másként úgy nyerhető, ha azt a pénzmennyiséget befektettük volna egy újonnan előállított eszközbe.

Ha Q_t a várható hozam egy eszközből r időpontban és d_t az 1£ jelenértéke r évvel el-

halasztva a folyó kamatlábon, akkor $\sum Q_r d_r$ a befektetés keresleti ára; és a befektetés addig a pontig történik, ahol $\sum Q_r d_r$ egyenlő lesz a fentiekben definiált befektetési kínálati árral. Ha $\sum Q_r d_r$ kisebb lesz a kínálati árnál, akkor elmarad a folyó befektetés a kérdéses eszközbe.

Így minden befektetési döntés döntően függ a $\sum Q_r d_r$ nagyságától (a befektetés keresleti áráról), amely a folyó kamatlábon diszkontált várható éves hozamok összege. Most azonban döntő probléma merül fel, mivel a befektetés várható hozamai, a Q_1, Q_2, \dots, Q_n nem ismertek, és következésképpen $\sum Q_r d_r$ nem számítható ki.

Amint Keynes magyarázza: „*Nevezetes tény a tudásalapunk rendkívüli bizonytalansága, amelyen a várható hozamra vonatkozó becslésünket meg kell tennünk. Tudásunk a befektetés hozamát befolyásoló tényezőkről néhány év múlva általában nagyon kicsi és gyakran elhanyagolható. Ha őszintén beszélünk, el kell ismernünk, hogy tudásalapunk kevés és néha semmi egy vasút, rézbánya, textilgyár, egy gyógyszer-szabadelom jó üzleti hírnevének, egy atlanti hajózás, egy épület, a London City-ben, hozamának becslésére tíz évre; vagy még öt évre is.*” (Keynes, 1936, pp. 149–150)

Mivel a tényleges jövőbeli hozamok ismeretlenek, azokat a $\sum Q_r d_r$ kiszámításában helyettesíteni kell, hogy befektetési döntést hozzunk a várható hozamokkal. A befektetési döntés következésképpen függ attól, amit Keynes a hosszú távú várakozás állapotának nevez, amely pszichológiai várakozás-állapotok összegzése, és amelyet megkülönböztet a rövid távú várakozástól.

A várakozás¹⁸értelmezését, a termelés méretére, lábjegyzetben adja meg Keynes: „*Egy vállalkozónak, akinek gyakorlati döntést kell hoznia a termelés méretére vonatkozóan, természetesen, hogy kétségtelenül, nem csak az egyetlen adott kibocsátás várható értékesítési bevételét kíséri figyelemmel, hanem számos becsült hipotetikus várakozást, különféle fokú valószínűséggel és határozottsággal. Vagyis a jövedelmek várako-*

zásain azt értem, hogy az a bevételre vonatkozó várakozás, amely, ha azt biztonsággal tették volna, ugyanazt a viselkedést eredményezné, mint egy csomó homályos és több különféle lehetőség, amely valójában a várakozásaiban rejlik, amikor meghozza a döntését.” (Keynes, 1936, p. 24, 3. lábjegyzet)

Ebből az idézetből látjuk, hogy Keynesnél a várakozást többféle, különféle fokú valószínűségeken és bizonyosságon alapuló hipotetikus várakozás alakítja. Ebből arra is következtethetünk, hogy Keynes a várakozás fogalmát standard értelmében használja, de implicite a valószínűségi fogalmával dolgozik. A bizonytalansággal kapcsolatban magyarázza: „*Nagyon bizonytalan-on, nem ugyanazt a dolgot értem, mint a 'nagyon valószínűtlen-en'*” (uo. p. 148, 1. lábjegyzet). A post-keynesiánusok nagy figyelmet szenteltek ennek az állításnak, de mielőtt megvizsgálnánk a kérdést részletesen, szükséges megadni a valószínűség Ramsey által adott értelmezését.

Keynes valószínűségi logikájára a legnagyobb hatású kritikát *Frank Plumton Ramsey* (1931/1926) posztumusz cikke jelentette. Ebben a tanulmányában Ramsey abból a tényből indul ki, hogy az emberek cselekedeteit jórészt az határozza meg, hogy mit hisznek és mit kívánnak – és milyen azon hitek és kívánságok erőssége. Az emberek hitének erősségét a szubjektív valószínűséggel mérik, vallotta Ramsey, amit az eseményekhez kapcsolnak.

Ramsey ezt a következő állítással magyarázza: „*Mindannyian biztosabbak vagyunk, hogy a nap felkel holnap, annál, mint hogy 12-t dobok két kockával elsöre, azaz, 35/36-nál magasabb fokú hitünk van abban.*” (Ramsey, 1931/1926, p. 23.)

Amikor az emberek például azt mondják: valószínűleg esni fog, akkor erősebben hiszik azt, hogy esni fog, mint hogy nem fog esni. De hogy mit tesznek ezen hit következményeként – például vajon visznek-e esernyőt, amikor kimennek a szabadba –, függ attól is, hogy mit akarnak: például vajon el akarják-e kerülni

ni és mennyire, hogy vizesek legyenek; vagy másképpen, a *szubjektív hasznosságot*, amit ahhoz kapcsolnak, hogy szárazok maradjanak.

„Az indukció egy ilyen hasznos szokás, és célszerű elfogadni. Az összes, amit a filozófia tehet az, hogy vizsgálja, meghatározza a hasznossági fokát és hogy megtalálja: a természet milyen jellemző vonásaitól függ ez.” (Ramsey, 1931/1926, p. 31.)

A szubjektív hasznosság méri az emberek kívánságainak erősségét, éppúgy, mint a szubjektív valószínűség a hitük erősségét, állította Ramsey. Kérdés, hogy miként szeparáljuk az emberi cselekedetek e két okát. Ramsey (1931/1926) posztumusz tanulmánya megmutatta, hogy mi módon szűrjük ki az emberek szubjektív hasznosságait és valószínűségeit azon döntéseiből, amelyeket különböző kockázatos vállalkozások közötti választáskor hoznak; és ezek alapul szolgálnak a pénzügyekben, statisztikában és filozófiában végzett különböző elemzésekhez. Keynes azonban csak részben fogadta el Ramsey kritikáját, amit a következő idézete bizonyít; tehát a jövő bizonytalanságával kapcsolatos álláspontját semmiképpen sem változtatta meg az 'Általános elmélet'-ben 1936-ban.

„Ramsey azzal érvel, hogy az általam előterjesztett állásponttal szemben, ez a valószínűség nem foglalkozik a propozíciók objektív relációival, hanem (bizonyos értelemben) a hit fokaiival, és sikerül megmutatnia, hogy a valószínűségek számítása egyszerűen összegez egy szabálykészletet annak biztosítására, hogy a hit-fokok rendszere, amit tartunk, egy konzisztens rendszer legyen. Így a valószínűségek számítása a formális logikához tartozik. De a hit-fokaink alapja, vagy az a priori valószínűségek, amint azokat régen nevezték, a *humán 'öltözetünk'* (viselkedésünk) része, talán, csupán a természetes szelekció adta nekünk, hasonlóan a felfogásainkhoz és emlékeinkhez, inkább, mint a formális logikához. Eddig elfogadom Ramseyt, azt hiszem igazza van. Azonban amikor megpróbálta megkülönböztetni a 'racionális' hitfokokat az általános hittől,

gondolom, még nem volt teljesen eredményes. Az indukció elvének eredete nem csupán azt jelenti, hogy az hasznos mentális szokás. Mégis, amikor megpróbálták megkülönböztetni a 'humán' logikát egyrészt a formális logikától, másrészt a leíró pszichológiától, Ramsey az utat bizonyára a következő tanulmányi terület felé mutatta, amikor a formális logikát helyes sorrendbe állították és a rendkívül korlátozott területét megfelelően definiálták.” (Keynes, 1933, pp. 243–244)

Amint ebből az idézetből jól látható, Keynes számos ponton elfogadta Ramsey bírálatát, de nem minden kérdésben. Az 'Általános elmélet'-ben mindenestre elhagyta a valószínűség logikai interpretációját és a hosszú távú várakozásokban, a befektetések jövőbeli hozamai meghatározásában a tudásunkat 'bizonytalan' nevezte, megkülönböztetve a 'valószínűtől'.

Keynes (1937) ezt a következőképpen magyarázza: „A 'bizonytalan' tudáson, hadd magyarázzam meg, nem csupán azt értem, hogy megkülönböztessem, ami ismert a bizonytalanra, attól, ami csak valószínű. A rulett játék, ebben az értelemben, nem tárgya a bizonytalanságnak; sem egy kihúzott győzelmi kötvény kilátása. Vagy, ismét, az életkilátás csak kissé bizonytalan. Még az időjárás is csak mérsékelten bizonytalan. A jelentés, amelyben használom a kifejezést, az, amelyben egy európai háború kilátása nem valószínű, vagy a réz ára és a kamatláb húsz év múlva, vagy egy új találmány elavulása, vagy gazdag magántulajdonosok helyzete a társadalmi rendszerben 1970-ben. Ezekről a dolgokról nincs olyan tudományos alap, amelyen formáljunk bármilyen számítható valószínűséget. Egyszerűen nem tudunk. Mindazonáltal, a cselekvés és a döntés szükségessége arra kényszerít bennünket, mint gyakorlati embereket, hogy a legjobbat tegyük, hogy figyelmen kívül hagyjuk ezt a kínos ténytet és pontosan úgy viselkedjünk, mint kell, ha mögöttünk van egy jó Benthamite számítás egy sor prospektív előnyről és hátrányról, mindegyik megszorozva egy nem megfelelő valószínűséggel,

várva, hogy összegezzék.” [Keynes, 1937, pp. 113–114., idézi Gillies (2003) is.]

Gillies (2003), meglehetősen kevés érveléssel, megpróbálja ’bebizonyítani’, hogy *Frank Knight* (1921) bizonytalansági fogalma megegyezik Keynesével, ami számomra egyáltalán nem meggyőző. Knight a lehető legegyszerűbben definiálja a bizonytalanságot: ’a kockázathoz rendelhető matematikai valószínűségi eloszlás, a bizonytalansághoz nem’ (Knight, 1921, p. 233.). A keynesi bizonytalanság a logikai valószínűségi elméletével, mint láttuk az előzőekben, Knight-énál sokkal bonyolultabb; az átjárás közöttük nem lehetséges, mivel értelmezése Knight-étől különböző koordinátáskon történik.¹⁹ Azóta is egyedül maradt Gillies e nézetével. Ráadásul Knight a kockázatot a múlt adataiból kiszámíthatónak veszi, ami szögesen ellentmond Keynes logikai valószínűségi elméletének. Sem Keynes, sem Knight, a legjobb tudomásom szerint, soha nem hivatkoztak írásaikban elméleteik kapcsolódására.²⁰

Keynes az ’Általános elmélet’ című könyvében és a ’The General Theory of Employment’ című cikkében is a hosszú távú előrejelzéseiben mindvégig explicite bizonytalan pénzügyi-gazdasági folyamatokat tételez fel anélkül, hogy egyszer is leírná az ergodikus szót. Egyszerűen tudomást sem vesz róla.

KÖVETKEZTETÉSEK, TANULSÁGOK

Az ergodikus hipotézis elfogadása a neoklaszikus pénzügyi közgazdaságtan legújabb irracionális feltevése. Samuelson két példája mutatja,

hogy a sztochasztikus pénzügyi folyamatokba bevezetett ergodikus fogalmak különböznek az ergodikus hipotézis kinetikus gázmodell statisztikai mechanikájában értelmezett fogalomtól. Az utóbbiban az egyes gázmolekulák komplex mikroszkopikus interakcióinak engedelmeskednie kell a termodinamika második törvényének, amely nem rendelkezik megfelelő fogalommal a közgazdaságtanban. A két fundamentális nehézség a reverzibilitás és az ismétlődés, amelyek csak közelítően mutatnak hasonlóságot a mainstream közgazdaságtan heterodox kritikáiban felmerülő fogalmakhoz és az ergodikus hipotézis pénzügyi alkalmazásaiban komoly kihívásokat jelentenek. Ugyanakkor az ökonometriában indokolt az ergodicitás bevezetése, például a sztochasztikus pénzügyi folyamat szigorú kovariancia-stacionaritásának²¹ biztosításához. Bizonyos stabil és stacionárius sztochasztikus pénzügyi modellek teszteléséhez, amelyek magukba foglalnak racionális várakozásokat vagy Markov-dinamikát, szintén szükségesek lehetnek ergodikus megszorítások. A pénzügyi közgazdaságtanban az ergodicitást megkövetelik a sztochasztikus differenciálegyenletekre, amelyeket az opcióárazási modellekben használtak fel.²²

Hogy milyen hátrányokkal jár az ergodikus hipotézis elfogadása az egyes pénzügyi modellekben, a tanulmány II. részében, a folyóirat következő számában elemezzük. Továbbá megvizsgáljuk a közgazdaság-tudomány különböző áramlatait az ergodicitás és a bizonytalanság szempontjából, ami a Samuelson-Nordhaus (1995) közgazdasági családfájának modernizálását teszi szükségessé.

JEGYZETEK

¹ Termodinamikai eredményeiket – amelyek elvezetnek az ergodicitáshoz – lásd Móczár (2008, 2010/c).

² Lásd Móczár (2008, 321–322. oldal)

³ Samuelson (1992) éles kritikával cáfolta Bródy (1989) félrevezető érvelését Von Neumann (1945) sejtésének igazolásában. Lásd Móczár (2010/c) vagy Móczár (2008).

- ⁴ Samuelson: „Amikor 20 éves voltam (...) vártam, hogy az ökonometria csökkenteni fogja a közgazdasági elméleteink bizonytalanságát. Képesek leszünk ellenőrizni és visszautasítani hamis elméleteket. Képesek leszünk kikövetkeztetni új jó elméleteket (...) kiderült, hogy nem lehetséges a megcáfolhatatlan igazság közelébe jutnunk (...)” (Samuelson, 1983, p. 66) Keynes is ezt vallotta Tinbergennel folytatott vitájában az ökonometriáról az 1940-es években.
- ⁵ Lásd Móczár [2008, 208–209. oldal]
- ⁶ Paradox helyzet hogy Samuelson éretlen fiatalemberként milyen kritikusan látta a neoklasszikus közgazdaságtan irreális feltevéseit, amelyeket később, már érett fejjel maradéktalanul elfogadott modelljei feltétel rendszerében. „Hősiesen elvonatkoztatok. Mindannyian teljesen egyformák vagyunk. Örökké élünk, tökéletes versenyzők vagyunk és majdnem tökéletes jövedőmondók. Teljesen alkalmazzuk a rugalmatlan munkakínálatot, rugalmatlan ricardoi földkínálattal, és (lehetőleg heterogén) tőkejóságokkal dolgozunk. A szubjektív időpreferenciába épített Pigou – Böhm rátával rendelkezünk, amely diszkontálja a minden egyes következő évi független hasznosságot $1/(1+p)$ tényezővel, ahol $p>0$ Hosszú távú egyensúlyban vagyunk technikai változás vagy népesség-növekedés nélkül: a tőkejóságok állományát addig a pontig csökkentjük, ahol a termelés eredményezte összes saját kamatrátá egyenlő r -rel, a piaci kamatlábbal; viszont az r egyenlő p -val, a szubjektív kamatlábbal, ami feltétele a fogyasztói hajlandóságunknak a jövedelem 100 százalék%-ára, zérus nettó tőkeberuházással.” (Samuelson, 1968, p. 5.)
- ⁷ Lásd Wapshott (2011)
- ⁸ A klasszikus közgazdász, John Stuart Mill (1848, Book 4, Chapter 6: *Of the Stationary State*) meggyőződéssel hitte és hirdette, hogy konstans népességet és tőkeállományt, vagyis a gazdaság stacionárius állapotát minden gazdaságnak szükséges és kívánatos elérnie. Mill könyve és nézetei óriási befolyással voltak a neoklasszikusokra: a könyv összesen 7 kiadást ért meg, 1919-ig tankönyv volt az Oxfordi Egyetemen,
- de még a mai, a túlzott jólétet kergető Európai Unió számára is sok megszívlelendő javaslattal él.
- ⁹ Azóta a fizika már továbblépett a determinizmuson, lásd Móczár (2008, 10–12. oldal)
- ¹⁰ Ezt a distinkciót használom én is, Móczár (2017).
- ¹¹ Később a több matematikát igénylő háromfokozatú legkisebb négyzetek módszerét, a kointegrációt és egységgyököket javasolja. Lásd Móczár (2010/b, 371–379. oldal.)
- ¹² Yoshino Shiozawa (Osaka City University), Michael Brady (California State University).
- ¹³ Samuelson és Davidson között soha sem volt vita.
- ¹⁴ Lásd Móczár (2010/a)
- ¹⁵ Keynes édesapja, John Neville Keynes (1852–1949) közgazdász volt, de etikával és logikával is professzionálisan foglalkozott. 1884-ben jelent meg könyve, *Studies and Exercises in Formal Logic* címmel, és sorozatos javítások után újabb kiadások követték 1906-ig. Keynes gyerekkorát és ifjúságát a szülői házban intellektuálisan a formális logika töltötte ki, mivel az egyes kiadások előtti viták és javítások élénken foglalkoztatták. [Vesd össze Roy Harrod (1951)]
- ¹⁶ Megjegyezzük: ahhoz, hogy az indifferencia elv ne vezessen paradoxonokhoz, olyan predikátumok szükségesek, amelyek irreducibilisek (tovább nem bonthatók), egymást kölcsönösen kizárják és a következtetés univerzumát kimerítik. Keynes tisztában volt ezzel a veszéllyel, és a *Treatise IV.* fejezetében megkísérelt megoldást találni erre a problémára.
- ¹⁷ Lásd Keynes (1937)
- ¹⁸ Keynes írásaiban sehol sincs utalás Jan Tinbergen 1932-es cikkére, amelyben elsőként fejti ki a racionális várakozások modelljét. (Móczár, 2008, 176. oldal) Vagyis

Keynes bizonytalanságon alapuló hosszú távú várakozás elméletében nem lett volna helye az ergodikus racionális várakozások modelljének, egyszerűen ignorálta volna. Ráadásul, nála a bizonytalanság állandó változással jár együtt: a regressziós analízisben a paraméterek konstansoknak vételét hibának tartotta, mivel 'sok gazdasági összefüggés időben nem homogén'.

¹⁹ A bizonytalanság mellett hozott döntésnek is van kockázata egy sztochasztikus világban, még ha nem is mérhető matematikai valószínűséggel, ami ellentmondást okoz Knight definíciójában, ami könnyen belátható.

²⁰ Keynes mindössze egyszer hivatkozott Knight (1934) cikkére, nevezetesen a kamatláb egyensúlyi meghatározásában (Keynes, 1936, p. 176. 3. lábjegyzet.), míg Knight csak a politikai gazdaságtan területéről

és módszertanáról hivatkozta Keynes édesapja, John Neville Keynes (1891) cikkét (Knight, 1921, p. 10, lábjegyzet). Ez igaz Knight művének négy kiadást (utolsó 1957-ben volt) megélt előszóira is, amelyben az egyetlen nívó a kockázat és bizonytalanság számomra kérdéses definíciója, egyébként az addigi neoklasszikusok, főleg *J. B. Clark* neoklasszikus írásait vizsgálja a profit szempontjából.

²¹ Az idősortmodellek mint a sztochasztikus differenciálegyenletek diszkrétizációi értelmezhetők. Egy idősor gyengén vagy kovariancia-stacionárius, ha várható értéke, varianciája és autokovarianciái függetlenek az időponttól. Erősen stacionárius, ha az egymást követő megfigyeléseinek együttes valószínűség eloszlása állandó.

²² Lásd in Móczár (2008, 220. oldal)

IRODALOM

BARNETT, W. (2004): An Interview with Paul A. Samulson, *Macroeconomic Dynamics*, Vol. 8, Issue 4, pp. 519–542

BRÓDY, A. (1989): Economics and Thermodynamics, in *John von Neumann and Modern Economics*, eds. by M. Dore, S. Chakravarty and R. M. Goodwin, Clarendon Press, Oxford

CLOWER, W. R. (ed.) (1969): *Monetary theory: selected readings*. Harmondsworth: Penguin modern economics readings, Baltimore

DAVIDSON, P. (2009/a): *The Keynes Solution (The Path To Global Economic Prosperity)*, Palgrave Macmillan, New York

DAVIDSON, P. (2009/b): Can future systematic financial risk be qualified? Ergodic vs nonergodic stochastic process. *Brasilian Journal of Political Economy*, Vol. 29. No. 4, pp. 324–340

DAVIDSON, P. (1996): Reality and Economic Theory, *Journal of Post-Keynesian Economics*, Vol. 18. No. 4, pp. 479–508

DAVIDSON, P. (1991): Is Probability Theory Relevant for Uncertainty? A Post-Keynesian Perspective, *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 5. No. 1, pp. 129–143

DAVIDSON, P. (1981–82): Rational Expectations, a fallacious foundation for studying crucial decision-making processes, *Journal of Post Keynesian Economics*, vol. 12, pp. 329–337

GIBBS, J. W. (1902): *Elementary Principles in Statistical Mechanics*, Yale University Press, Reprinted (1981) by Ox Bow Press, Woodbridge, Co.

GIBBS, J. W. (1879): Fundamental formulae of dynamics, *American Journal of Mathematics*, Vol. 2. No. 1, pp. 49–64

- GIBBS, J. W. (1875–1878): On the Equilibrium of Heterogeneous Substances, *Transactions of the Connecticut Academy of Arts and Sciences*, 3, pp. 108–248
- GILLIES, D. (2003): Probability and Uncertainty in Keynes's economics. In J. Runde & S. Mizuhara (eds.), *The Philosophy of Keynes's economics: Probability, uncertainty, and convention* (pp. 111–129). Routledge, London, New York
- HARROD, R. (1951): *The Life of John Maynard Keynes*, W. W. Norton Co. New York, London
- KEYNES, J. M. (1937): The General Theory of Employment, *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 51. pp. 209–223
- KEYNES, J. M. (1936): *The General Theory of Employment, Interest, and Money*, A Harbinger Book, Harcourt, Brace World, Inc. New York, Chicago
- KEYNES, J. M. (1933): *Essays in Biography*, New Edition, W. W. Norton, New York
- KEYNES, J. M. (1921): *A Treatise on Probability*, Macmillan, London
- KEYNES, J. N. (1884): *Studies and Exercises in Formal Logic*, Macmillan, London
- KEYNES, J. N. (1891): *Scope and Logical Method of Political Economy*, CUP, Cambridge, UK.
- KIRSTEIN, M. (2015): From the Ergodic Hypothesis in Physics to the Ergodic Axiom in Economics, Conference Paper, Linz
- KNIGHT, F. (1934): Capital, Time, and the Interest Rate, *Economica*, August.
- KNIGHT, F. (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*, Hart, Schaffner and Marx; Houghton Mifflin Company, Boston, MA.
- KOLMOGOROV, N. A. (1954): On the conversation of conditionally periodic motions for a small change in Hamilton's function (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. USSR* 98. pp. 525–530
- LUCAS, R. and SARGENT, T. J. (eds.) (1981): *Rational Expectations and Econometric Practice*, University Minnesota Press, Minnesota
- MAXWELL, J. C. (1867): On the Dynamical Theory of Gases, *Philosophical Transactions of the Royal Society*, Vol. 157, pp. 49–88
- MILL, J. S. (1848): *Principles of Political Economy with Some of their Applications to Social Philosophy*, John W. Parker, London
- MÓCZÁR, J. (2017): Arrow-Debreu Model versus Kornai-critique, *Athen Journal of Business and Economics*, Vol. 3. No. 2, pp. 143–169
- MÓCZÁR, J. (2010/a): Anatomy and Lessons of the Global Financial Crisis, *Public Finance Quarterly*, State Audit Office of Hungary, vol. 55(4), pp. 753–775
- MÓCZÁR, J. (2010/b): Paul A. Samuelson, a közgazdaságtan utolsó nagy generalistája (1915–2009), *Matematika és közgazdaságtan, Közgazdasági Szemle*, LVII. évfolyam, április (371–379 oldal)
- MÓCZÁR, J. (2010/c): A fizikai matematika legújabb eredményei mint a közgazdaság-tudomány lehetséges vizsgálati eszközei, *Alkalmazott Matematikai Lapok*, 27, 41–77 oldal
- MÓCZÁR, J. (2008): *Fejezetek a modern közgazdaságtudományból, Sztochasztikus és dinamikus nemegyensúlyi elméletek, természettudományos közelítések*, Akadémiai Kiadó, Budapest
- PROGOGINE, I. (1962): *Introduction to nonequilibrium thermodynamics*, Wiley-Interscience, New York

RAMSEY, P. F. (1931/1926): Truth and Probability, Edited by R. B. Braithwaite, 1931. London: Kegan, Paul, Trench, Trubner & Co. Ltd. Harcourt, Brace and Company, New York

SAMUELSON, A. P. (1992): *Economics and Thermodynamics: von Neumann's Problematic Conjecture*, in *Rational Interaction*. ed. by R. Selten, Springer – Verlag, Berlin

SAMUELSON, A. P. (1983): My Life Philosophy. *The American Economist*, Vol. 27, No. 2. pp. 5–12

SAMUELSON, A. P. (1976): Optimality of Sluggish Predictors under Ergodic Probabilities, *International Economic Review*, Vol. 17, No. 1. pp. 1–7

SAMUELSON, A. P. (1969): Classical and Neoclassical Monetary Theory, in Clower, R. W. *Monetary theory: selected readings*. Harmondsworth: Penguin modern economics readings, pp. 182–194

SAMUELSON, A. P. (1968): What Classical and Neoclassical Monetary Theory Really Was, *The Canadian Journal of Economics*, Vol. 1. No. 1. pp. 10–15

SAMUELSON, A. P. (1965): Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly. *Industrial Management Review*, 6:2, pp. 41–49

SAMUELSON, A. P. – NORDHAUS, W. D. (1995): *Economics* (12th ed.), McGraw-Hill, New York

VON NEUMANN, J. (1945): A Model of General Economic Equilibrium, *Review of Economic Studies*, 13, pp. 1–9

WAPSHOTT, N. (2011): *Keynes and Hayek: The Clash That Defined Modern Economics*, W. W. Norton Co., New York

WEINTRAUB, E. R. (1991): *Stabilizing dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge